Guia de Física I

por Rodrigo Medina A.
Centro de Física IVIC, Departamento de Física USB

Versión preliminar, mayo 2009

Reproducción libre

Prólogo

En esta guia pretendemos presentar la teoría correspondiente al curso de Física I de la Universidad Simón Bolívar de una manera concisa pero completa. Esta guia no pretende ser un texto completo; principalmente carece de ejemplos en los que se apliquen los principios fundamentales. Esta falla deberá ser suplida por el profesor. Tampoco proponemos problemas ni ejercicios, pero para eso hay una amplia literatura disponible. Esperamos que esta guia sea de alguna utilidad para los estudiantes.

Esta versión preliminar está seguramente plagada de errores por lo que apreciamos cualquier sugerencia, crítica o comentario.

RM

Unidad 1

Introducción a la Física

La Física y las otras ciencias.

La Física estudia las leyes fundamentales de la Naturaleza, por eso está relacionada estrechamente con las otra ciencias naturales y con la tecnología. El siguiente esquema nos da una idea de la relación entre la diferentes ramas del saber o ciencias.

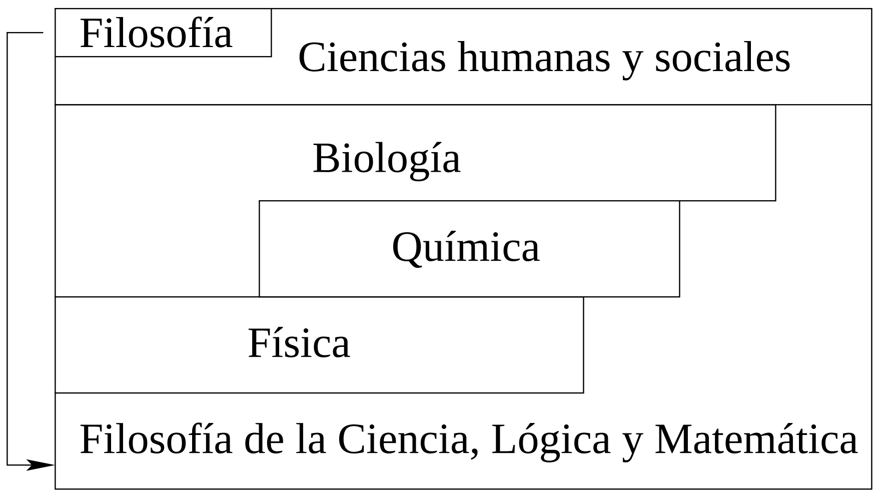

Fig. 1.1. Relación entre las ciencias

En la base están la Filosofía de la Ciencia, la Lógica y la Matemática, que nos dicen como se hace ciencia, como se razona correctamente (Lógica) y nos proporciona un potentísimo método para hacer razonamientos muy complejos (Matemática). La Matemática, aunque tiene características semejantes, no es una ciencia natural. El origen de sus conceptos no es la naturaleza sino que es convencional. Una teoría matemática típica está formada por **conceptos primitivos** y **conceptos derivados**, que se obtienen de los primitivos mediante **definiciones**. Tenemos luego los **axiomas**, que son proposiciones que se asumen como válidas *a priori*. Los axiomas deben ser consistentes. Mediante deducción se obtienen otras proposiciones verdaderas que son los **teoremas** de la teoría. Algunas veces es posible un nuevo axioma a una teoría preexistente, axioma que debe ser independiente y consistente con los otros. De esa manera se obtiene una teoría particular de una más general. Sobre la Matemática tenemos la Física que estudia los componentes básicos de la naturaleza y las leyes que satisfacen. Las leyes físicas típicas se presentan como expresiones matemáticas, y las teorías físicas principales tienen la forma de teorías matemáticas; por eso hay una relación muy estrecha entre Física y Matemática. Grandes físicos fueron también grandes matemáticos (Arquímides, Newton, Gauss). Ha sido frecuente que problemas planteados por la Física hayan generado nuevas ramas de la Matemática y viceversa que nuevas ramas de la Matemática hayan encontrado su aplicación en Física.

Las leyes que determinan como se forman, que propiedades tienen y como reaccionan átomos y moléculas (o sea las leyes fundamentales de la Química) tienen su explicación en la Física. La estructura y el funcionamiento de los seres vivos tienen su explicación en la Física y la Química. Por otra parte el Hombre es un ser vivo y por lo tanto las ciencias humanas y sociales (Psicología, Sociología, Antropología, etc.) se soportan en la Biología. Todas las ciencias naturales y sociales se soportan en la Matemática, por ejemplo la Estadística es fundamental en los estudios sociológicos. La Filosofía es una ciencia humana; por lo que en esta discusión terminamos en donde empezamos.

El hecho de que las leyes fundamentales de la Química tengan su explicación en la Física no significa que la Química se reduzca a la Física. En cada nivel de complejidad aparecen las llamadas propiedades emergentes. Cada ciencia natural tiene sus propias leyes y su propio cuerpo de conocimiento empírico. Es prácticamente imposible predecir en base a las leyes físicas la inmensa variedad de la Química Orgánica, así como esta última no puede predecir la existencia, digamos, de un sapo.

Las otras ciencias naturales como la Astrofísica, Geofísica, Ecología, que por la complejidad de los sistemas que estudian no son consideradas básicas, se apoyan en todas las ciencias básicas. Lo mismo dígase de las ingenierías y tecnologías.

Teoría y experimento

La ciencia pretende comprender y explicar la Naturaleza. La ciencia cataloga, ordena, generaliza los hechos reales aislados. Esto lo hace mediante conjuntos estructurados de proposiciones: las **teorías científicas**. Los objetos de las teorías son categorías teóricas que se obtienen de los hechos reales con variados grados de abstracción. Por ejemplo son categorías teóricas conceptos como carga eléctrica, virus, especie animal, nicho ecológico, energía, elemento químico, etc. La conveniencia o no de usar ciertas categorías teóricas depende del éxito que tenga la teoría en explicar la realidad. La teoría científica hipotiza la validez de ciertas **leyes** que son relaciones entre las categorías teóricas. Las leyes pueden ser muy generales como: "la energía de un sistema aislado se conserva", o muy particulares como : "El síndrome de inmunodeficiencia adquirida (SIDA) es una enfermedad infecciosa producida por un virus". Las leyes teóricas implican relaciones entre los hechos reales. En una teoría científica satisfactoria las leyes deben ser consistentes con los hechos reales conocidos y además debe predecir relaciones no triviales entre hechos reales aún no conocidos. En otras palabras debe ser posible constatar la validez de la teoría confrontándola con la realidad. Esta confrontación es lo que llamamos **experimento**. Como las leyes teóricas son proposiciones generales su validez no se puede **probar** con la observación de un número finito de casos particulares. Sin embargo si podemos probar la falsedad de una ley: basta que no se cumpla en un solo caso. Decimos que la teoría debe ser **falsificable**. Toda teoría científica se acepta provisionalmente, hasta que se demuestre lo contrario.

Las teorías físicas modernas son matemáticamente muy complejas. Esto ha hecho que el trabajo de los físicos se haya especializado; hay físicos teóricos y experimentales. Hoy en día se ha desarrollado también la Física Computacional, en la que se ponen a prueba teorías físicas mediante el modelaje numérico con computadoras. Estas técnicas son particularmente útiles cuando se estudian sistemas con muchísimos elementos o teorías matemáticamente muy complejas.

Teorías generales de la Física

La teoría más básica de la Física es la teoría del espacio y del tiempo. Tenemos luego la **Cinemática** que estudia como describir el movimiento y la **Dinámica** que determina cual es el movimiento de los cuerpos dado un cierto tipo de interacción (fuerza) entre ellos.

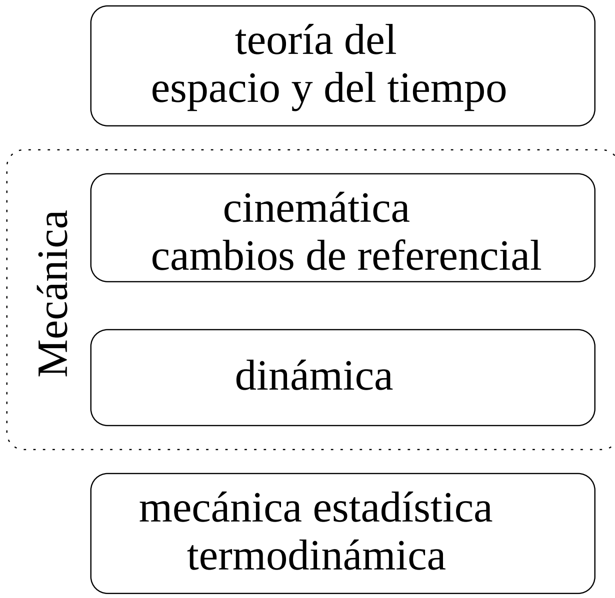

Fig. 1.2. Teorías generales de la Física

Los cuerpos macroscópicos están formados por un número inmenso de átomos y moléculas por lo que resulta imposible una descripción detallada usando la mecánica. Sin embargo se descubre empíricamente que para estos sistemas aparecen nuevas regularidades descritas por la **Termodinámica**. Esta es una teoría fenomenológica, o sea derivada de la experiencia, que tiene sus propias categorías como temperatura y calor. La **Mecánica Estadística**, combinación de mecánica con estadística, es una teoría que permite por una parte darle un basamento de primeros principios a la Termodinámica y por otra calcular propiedades termodinámicas de sistemas particulares.

El espacio físico es una abstracción matemática ligada a un cuerpo rígido que se asume en reposo y que forma el **sistema** o **marco de referencia**. La teoría clásica del espacio y del tiempo que nos viene desde la antigüedad es muy simple: La geometría del espacio físico, independientemente del marco de referencia, es la que estableció Euclides hace 2300 años (geometría Euclídea). A diferencia del espacio, que es relativo al marco de referencia, el tiempo sería absoluto. Esto es, se supone que se pueda sincronizar todos los relojes, independientemente de como se muevan. Esto fue aceptado por Galileo y Newton. Los fundamentos de la mecánica clásica fueron establecidos por Newton con sus tres famosas leyes en el siglo XVII. La Mecánica Clásica se desarrolló por todo el siglo XVIII llegando a tener un alto grado de sofisticación matemática. La Termodinámica y la Mecánica Estadística se desarrollaron durante el siglo XIX.

Un punto importante de la Mecánica es que sus leyes son válidas solamente en particulares marcos de referencia, que denominamos **sistemas de referencia inerciales** (SRI) y que se mueven con movimiento uniforme entre si. Los SRI son equivalentes entre sí (Relatividad Galileana).

A principios del siglo XX Einstein estableció que la velocidad de la luz era la velocidad máxima de la naturaleza $c \approx 3 \times 10^8$m/s. Al haber una velocidad máxima para las señales se hace imposible sincronizar todos los relojes. Sólo es posible sincronizar los relojes que estén en reposo con respecto a un mismo SRI. En otras palabras el tiempo también es relativo. La cinemática en un SRI es para Einstein idéntica a la cinemática clásica, pero las reglas para cambiar de marco de referencia son diferentes. La nueva teoría se denominó **Relatividad Especial**. La Dinámica también es diferente. Desde entonces el adjetivo "relativista" se usa en Física para indicar algo que está conforme con la Relatividad Especial o algo que requiere de la Relatividad Especial. Si las velocidades son mucho más pequeñas que la velocidad de la luz los efectos relativistas no se notan.

	$v << c$	$v \sim c$
sistemas macroscópicos	Mecánica Newtoniana (Clásica no−Relativista)	Mecánica Clásica Relativista
sistemas microscópicos	Mecánica Cuántica no−Relativista	Mecánica Cuántica Relativista

Fig. 1.3. Subdivisiones de la Mecánica

También a principios del siglo XX se descubrió que la Mecánica Newtoniana no valía para cuerpos muy pequeños. A escala atómica ($\sim 10^{-10}$m) es necesario usar una nueva mecánica, la **Mecánica Cuántica**. Esta teoría se desarrolló en la primera mitad del siglo XX en su versión no relativista y a mediados de siglo en su versión relativista. La Mecánica Cuántica es una teoría matemáticamente muy compleja, por eso seguimos estudiando la Mecánica Clásica no Relativista que describe muy bien la mayor parte de lo que pasa en nuestro entorno humano.

Interacciones fundamentales

Todas las fuerzas que se observan en la naturaleza se pueden reducir a cuatro interacciones fundamentales. De estas sólo dos se observan a escala macroscópica: La **atracción gravitacional** y las **interacciones electromagnéticas**.

La versión no-relativista de la gravedad fue establecida por Newton en el siglo XVII. Esta teoría junto con sus tres leyes de la mecánica le permitió explicar el movimiento de los planetas y otros objetos del sistema solar. A principios del siglo XX Einstein desarrolló la versión relativista de la gravedad, teoría que lleva el nombre de **Relatividad General**.

Desde el siglo XVII y especialmente en los siglos XVIII y XIX se estudió ampliamente los fenómenos eléctricos y magnéticos. Al principio se pensó que eran dos tipos de fenómenos separados, pero al principio del siglo XIX se demostró que eran dos aspectos de una misma interacción. La teoría llegó a su culminación con la leyes de Maxwell en la segunda mitad del siglo XIX. Las leyes de Maxwell predicen la existencia de ondas electromagnéticas de las que la luz sería un ejemplo, y que se propagan con una determinada velocidad $c \approx 3 \times 10^8$m/s, que depende de las constantes del electromagnetismo. Esta propiedad es manifiestamente incompatible con la Relatividad Galileana: la velocidad de la luz pudiera ser igual en cualquier dirección solamente en un marco de referencia particular, al que se llamó éter. Pero todos los tentativos de medir una velocidad absoluta respecto al éter fracasaron. Einstein resolvió este dilema suponiendo que en realidad el éter no existía y que todos los SRI eran equivalentes también para el electromagnetismo. El precio que hubo que pagar fue una nueva manera de calcular los cambios de marco de referencia en la que el tiempo es relativo. La nueva teoría se llamó Relatividad Especial. Por su misma naturaleza la teoría electromagnética es relativista. La combinación de esta teoría con la Mecánica Cuántica produce la Electrodinámica Cuántica, una de las teorías físicas más precisas. Una de las predicciones de esta teoría es la existencia de una partícula asociada a las ondas electromagnéticas, el fotón, que fue propuesto por inicialmente por Einstein en 1905.

Teoría Electromagnética Clásica	Electrodinámica Cuántica
Relatividad General	No hay una teoría consistente
Teoría macroscópica	Teoría Cuántica

Fig. 1.4. Interacciones de largo alcance

Uno de los frentes abiertos de la Física contemporánea es la falta de una teoría consistente que combine la Relatividad General con la Mecánica Cuántica.

Las otras dos interacciones fundamentales de la naturaleza tienen un alcance muy corto, del orden de la dimensiones de los núcleos atómicos ($\sim 10^{-15}$m). La interacción **Nuclear**

Fuerte es la responsable de la fuerza que une protones y neutrones en el núcleo atómico. La interacción **Nuclear Débil** está relacionada con el decaimiento radioactivo β, ($\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e} + \bar{\nu}$). Las teorías de estas interacciones son relativistas y cuánticas y se desarrollaron en la segunda mitad del siglo XX.

Ramas de la Física según el sistema estudiado

La Física se puede subdividir también en ramas según el tipo de sistema que estudia. Tenemos por ejemplo:

Física de partículas elementales e interacciones fundamentales (Física de energías altas)
Física nuclear
Física atómica y molecular
Física de macromoléculas
Física de materia condensada (líquidos, sólidos, amorfos, polímeros, etc.)
Física de agregados y sistemas complejos
Física planetaria, Astrofísica, Cosmología.

Otras ramas que no entran en esta clasificación son la Óptica, la Acústica y la Mecánica de Fluidos. Otro campo que se ha desarrollado últimamente es el estudio de sistemas que no sean ni tan pequeños para que se pueda aplicar fácilmente la Mecánica Cuántica ni tan grandes como para que estén bien descritos por la Mecánica Clásica (sistemas mesoscópicos).

A medida que la Física se va desarrollando sus fronteras se mueven cada vez más hacia lo muy pequeño, lo muy complejo o lo muy grande.

Magnitudes físicas, unidades y dimensiones

La Física estudia las propiedades de la materia. Algunas propiedades no las hemos podido cuantificar, como el sabor de una substancia, otras como la longitud sí las podemos cuantificar. Las propiedades de la materia que son susceptibles de ser cuantificadas son las **magnitudes físicas**. Algunas magnitudes físicas son números, como por ejemplo la cantidad de moléculas en una región de espacio es un número natural, pero la mayoría de las magnitudes físicas *no son números*. Sin embargo las magnitudes físicas tienen propiedades comunes a los números, se pueden **comparar**, se pueden **sumar** y se pueden **multiplicar por un número**.

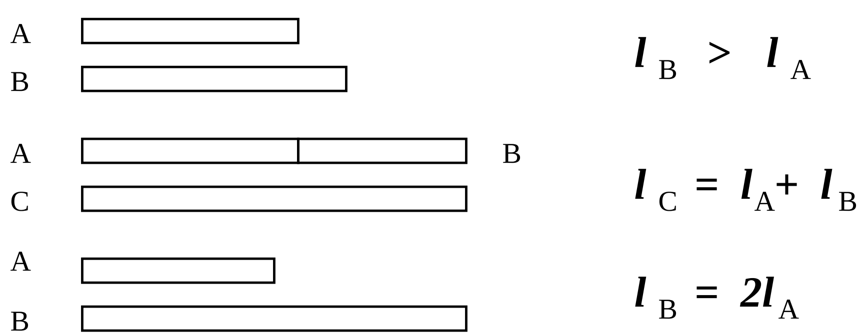

Fig. 1.5. Operaciones matemáticas con longitudes

Desde un punto de vista matemático las magnitudes físicas forman espacios vectoriales de dimensión 1. Sólo podemos comparar o sumar magnitudes físicas homogéneas, es decir del mismo tipo. Podemos sumar la masa de una mosca con la de un clavo, pero no podemos sumar la longitud del clavo con su masa. Dos magnitudes físicas, aún diferentes, se pueden multiplicar, pero el resultado es una tercera magnitud física. Por ejemplo el producto de dos longitudes es un área y el producto de una velocidad por un tiempo es una longitud.

Podemos dar una medida numérica a una magnitud comparándola con un patrón. El valor de la magnitud del patrón es la unidad de medida.

$$\text{valor} = \text{medida} \times \text{unidad}$$

Las leyes físicas tienen típicamente la forma de relaciones matemáticas entre variables que representan magnitudes físicas.

El valor de las variables se determina, o bien midiéndolas y comparándolas con un patrón o unidad, o bien calculándolas a partir de otras variables. Las leyes físicas permiten definir las unidades de todas las magnitudes físicas en función de la unidades de unas pocas magnitudes fundamentales. Para la geometría la magnitud fundamental es la longitud (l). Para la cinemática hay que agregar el tiempo (t) y para la dinámica la masa (m). En la Termodinámica aparece la temperatura absoluta (T) y en electromagnetismo la carga eléctrica (q). Cualquier otra magnitud física tiene unas **dimensiones** que se expresan como el producto de las magnitudes fundamentales elevadas a un exponente. Si X es una variable, sus dimensiones se denotan con $[X]$ y serán

$$[X] = l^\alpha t^\beta m^\gamma q^\delta T^\epsilon$$

Típicamente los exponentes $\alpha, \ldots, \epsilon$ son números enteros, o en todo caso racionales. No es necesario escribir las magnitudes fundamentales que tengan exponente cero. Sigue una lista de las dimensiones de algunas magnitudes físicas derivadas.

Área	$[A] = l^2$
Volumen	$[V] = l^3$
Velocidad	$[v] = lt^{-1}$
Aceleración	$[a] = lt^{-2}$
Densidad	$[d] = [m]/[V] = l^{-3}m$
Fuerza	$[F] = [m][a] = lt^{-2}m$
Presión	$[p] = [F]/[A] = l^{-1}t^{-2}m$
Energía	$[E] = l^2t^{-2}m$
Potencia	$[P] = [E]/[t] = l^2t^{-3}m$
Frecuencia	$[f] = t^{-1}$
Entropía	$[E]/[T] = l^2t^{-2}mT^{-1}$
Corriente eléctrica	$[I] = [q]/[t] = t^{-1}q$
Potencial eléctrico	$[V] = [E]/[q] = l^2t^{-2}mq^{-1}$
Resistencia eléctrica	$[R] = [V]/[I] = l^2t^{-1}mq^{-2}$

Una vez establecidas las unidades de las variables fundamentales quedan determinadas las unidades de la otras variables según las dimensiones correspondientes.

El sistema de unidades más usado actualmente es el internacional (SI), que usa el **segundo** (s) como unidad de tiempo, el **metro** (m) como unidad de longitud, el **kilogramo** (kg) como unidad de masa, el grado **kelvin** (K) como unidad de temperatura absoluta y el **culombio** (C) como unidad de carga. En realidad no se usa un patrón de carga sino de corriente eléctrica cuya unidad es el **amperio** ($1\,\mathrm{A} = 1\,\mathrm{Cs}^{-1}$), por eso el sistema se denomina también sistema de unidades MKSA (metro-kilogramo-segundo-amperio). Sin embargo es más conveniente didácticamente considerar la carga como magnitud fundamental en vez de la corriente eléctrica.

La idea de establecer un sistema de unidades racional, en el que las subunidades se obtuviesen dividiendo por factores de diez, el sistema métrico decimal, data de los tiempos de la Revolución Francesa en el siglo XVIII. La definición original de segundo fue $1/86\,400$ la duración del día solar promedio ($86\,400 = 24 \times 60 \times 60$). Con el avance de la tecnología fue posible detectar variaciones en la duración del año y del día sideral (tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor de su eje). Hoy en día el segundo se define como $9\,192\,631\,770$ períodos de la radiación de la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado base del isótopo 133 del Cesio.

La definición de original del metro fue la diezmillonésima parte de la distancia entre el ecuador y un polo. Se hizo una expedición para medir la longitud del meridiano y se hizo una barra patrón. Con el tiempo se detectó un error en la medición del meridiano, por lo que se decidió que el metro era la longitud de la barra patrón. Como actualmente es posible medir la velocidad de la luz con mayor precisión de la de las mediciones de longitud de una barra, y como se confía en que la velocidad de la luz sea en efecto una constante universal, se decidió definir el metro a partir del segundo fijando el valor de la velocidad de la luz. En un segundo la luz recorre exactamente $299\,792\,458$ metros.

La definición original de kilogramo era la masa de un litro de agua a la temperatura en la que la densidad es máxima ($\sim 4^{\text{o}}$C). Usando la definición se construyó un patrón de una aleación de 90% platino y 10% iridio, pero también en este caso al mejorar la tecnología se demostró que la definición y el patrón difieren. Se decidió que el kilogramo era la masa del patrón, cosa que sigue siendo hoy en día. El kilogramo patrón se guarda en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres en las cercanías de París.

La escala Kelvin de temperatura está definida de forma que la temperatura del punto triple del agua (en el que coexisten en equilibrio, agua, hielo y vapor) es $273{,}16\,\mathrm{K}$.

Muchas unidades derivadas tienen su propio nombre, por ejemplo la unidad de fuerza es el newton ($1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\,ms^{-2}}$), la unidad de energía es el joule o julio ($1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg\,m^2s^{-2}}$), la unidad de presión es el pascal ($1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{kg\,m^{-1}s^{-2}}$), la unidad de frecuencia es el hertz ($1\,\mathrm{Hz} = 1\,\mathrm{s^{-1}}$) y la unidad de potencial eléctrico es el voltio ($1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{kg\,m^2s^{-2}C^{-1}}$).

Hay unidades particulares que se usan en determinados campos. En Química y Física Molecular se usa la unidad de masa atómica (uma) también llamada dalton (Dalton) que es 1/12 de la masa del isótopo 12 del Carbono. Con esta unidad se expresan los pesos atómicos y moleculares. El número de Avogadro N_A es el número de daltones que hay en un gramo ($N_A \approx 6{,}02214179 \times 10^{23}$). Un mol de algo es un número de cosas igual al número de Avogadro. En la Física Atómica se usa el Ångstrom ($1\,\text{Å} = 10^{-10}\mathrm{m}$). El diámetro del átomo de Hidrógeno es aproximadamente $1\,\text{Å}$. El litro (ℓ) es una unidad de volumen igual a $10^{-3}\mathrm{m}^3$. La tonelada (t) es igual a $10^3\,\mathrm{kg}$. La unidad astronómica UA es la longitud del semieje mayor de la órbita terrestre. El año-luz es la distancia recorrida por la luz en un año.

Se obtienen múltiplos y submúltiplos de las unidades anteponiendo al nombre de la unidad una letra que corresponde a un factor multiplicativo. Los factores estándar más comunes, con sus nombres, son múltiplos:

factor	símbolo	prefijo
10	da (D)	deca
10^2	h	hecto
10^3	k	kilo
10^6	M	mega
10^9	G	giga
10^{12}	T	tera

submúltiplos:

factor	símbolo	prefijo
10^{-1}	d	deci
10^{-2}	c	centi
10^{-3}	m	mili
10^{-6}	μ	micro
10^{-9}	n (ν)	nano
10^{-12}	p	pico
10^{-15}	f	femto

Por ejemplo 1GHz (un gigahertz) es 10^9Hz, mientras que 1pC (un picoculombio) es 10^{-12}C y 1 mK (un milikelvin) es 10^{-3}K.

Como escribir y manipular correctamente las fórmulas físicas

Las leyes deben ser escritas de forma que no dependan de las unidades que se escojan. Para lograr esto las fórmulas deben cumplir las siguientes reglas:

1- El producto de variables tiene las dimensiones que resultan del producto de las dimensiones de cada variable.

2- Los dos lados de una igualdad o desigualdad deben ser homogéneos, o sea deben tener las mismas dimensiones.

3- Nunca se puede sumar o restar cantidades con dimensiones diferentes.

4- Términos con las mismas dimensiones pero con unidades diferentes pueden aparecer en la misma expresión, pero al efectuarse la operación deben ser llevados a las mismas unidades.

5- Las únicas funciones cuyos argumentos pueden tener dimensiones son el valor absoluto y las potencias con exponente entero o racional.

6- Las unidades de las variables no se escriben. Sólo se escriben las unidades de las constantes cuando se exprese el valor numérico.

Por ejemplo es correcto escribir $1\,\mathrm{km}+25\,\mathrm{m} = 1025\,\mathrm{m}$, pero la expresión $d+v$ donde d es una distancia y v una velocidad está seguramente equivocada. También es incorrecta la fórmula

$$F = ma \quad (\mathrm{N})$$

en la que aparece explícitamente la unidad del resultado. Las variables m y a tienen sus propias unidades y el producto tiene la unidad correcta. Lo correcto es escribir simplemente

$$F = ma.$$

En un libro de matemáticas pudiera aparecer que la posición x de un móvil como función del tiempo t está dada por la expresión

$$x(t) = 5\sin(2t),$$

donde la unidad de x es metros y la de t es segundos. En física la forma correcta de escribir la fórmula es

$$x(t) = 5\,\mathrm{m}\sin(2\,s^{-1}t)$$

o también

$$x(t) = A\sin(bt),$$

donde $A = 5\,\mathrm{m}$ y $b = 2\,s^{-1}$. A debe tener las mismas dimensiones que x y el producto bt no debe tener dimensiones. Nótese que el significado de las variables x y t es diferente en la primera y en la segunda fórmula. En la primera las variables representan las medidas en determinadas unidades (números), mientras que en la segunda representan las magnitudes físicas.

En ciencia se prefiere no escribir números con más de dos o tres ceros al final del número o antes de la primera cifra significativa. A 0,0000253 se prefiere $2{,}53 \times 10^{-5}$ y a 643 200 000 se prefiere $6{,}432 \times 10^{8}$.

Unidad 2

Tiempo, Espacio, Geometría, Vectores

Tiempo

El tiempo es una de las magnitudes físicas fundamentales. Todos tenemos una idea intuitiva de tiempo pero tratar de definirlo es una de las tareas más difíciles. Se han escrito multitud de tratados sobre el tema, pero para la Física lo que importa no son las disquisiciones sobre la naturaleza del tiempo, sino como se mide. La posibilidad de medir el tiempo se basa en la siguiente hipótesis, que podríamos llamar **principio de la homogeneidad del tiempo**:

Las leyes físicas no cambian con el transcurrir del tiempo.

En base a este principio si repetimos un proceso físico en las mismas condiciones su duración será la misma. Esto permite usar la duración de un proceso físico cualquiera, que se pueda repetir en las mismas condiciones, para definir un patrón para medir el tiempo. Llamamos reloj cualquier mecanismo que sirva a este propósito. Los ejemplos más clásicos son el reloj de arena y el de agua (clepsidra), conocidos ya en la antigüedad. Un gran avance se logró en el siglo XVII, cuando se usó un péndulo para regular el ritmo de los relojes de engranajes, que ya se conocían desde el siglo X. Posteriormente la substitución del péndulo por un oscilador de muelle en espiral permitió la construcción de relojes portátiles. Diferentes tipos de osciladores mecánicos o eléctricos han sido usados para construir relojes. Los llamados relojes atómicos usan como patrones las frecuencias de determinadas radiaciones atómicas. Estos relojes tienen gran precisión porque las frecuencias de las oscilaciones no dependen de los detalles de construcción, como sería por ejemplo la longitud de un péndulo.

Ya en la antigüedad, se comprobó que, si bien la duración del **día natural** (o sea el tiempo que pasa el sol sobre el horizonte) cambia apreciablemente durante las épocas del año y depende de la latitud, el **día solar** (el tiempo entre dos mediodías sucesivos = día natural + noche) era constante. Nótese que el día solar no es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor de su eje, tiempo este que se denomina **día sideral** y que se mide con dos pasadas sucesivas de una misma estrella por el meridiano. El día solar es unos minutos más largo que el día sideral porque durante el tiempo en que la Tierra da una vuelta sobre su eje el eje Sol-Tierra ha rotado un cierto ángulo. En un año hay aproximadamente 365,25 días solares y 366,25 días siderales. Con relojes más precisos, se pudo verificar que el día solar también fluctúa durante el año, debido a que la órbita terrestre es elíptica, no circular. En cambio el día sideral se mantiene constante. Por eso se definió el segundo en base al día solar promedio, que es proporcional al día sideral. Con el advenimiento de los relojes atómicos se descubrió que aún las duraciones del día sideral y del año cambian muy lentamente. Por esto se cambió el patrón de tiempo y se usa la radiación hiperfina del estado base del isótopo ^{133}Cs, de 9,2 GHz para definir el segundo.

Longitud, marco de referencia y espacio

La longitud es otra de las magnitudes fundamentales de la Física. La posibilidad de poder medir la longitud se basa en la existencia de **cuerpos rígidos**, o sea cuerpos en los que las distancias entre sus partes se mantienen constantes. Los cuerpos rígidos se pueden usar como reglas. La distancia entre dos cuerpos es el mínimo número reglas iguales adyacentes que se pueden poner entre uno y otro.

En el estudio de la mecánica es muy usado el concepto de **partícula** o **punto material** que sería un cuerpo cuyas dimensiones son insignificantes con respecto a las otras dimensiones del sistema estudiado. Es de hacer notar que un cuerpo puede ser o no una partícula según el contexto. Por ejemplo si estudiamos el movimiento de los planetas en el sistema solar podríamos considerar la Tierra como una partícula.

Otro concepto fundamental de la mecánica es el de **sistema de referencia** (SR). El sistema o marco de referencia es un **cuerpo rígido** que consideramos en reposo y que permite determinar la posición de otros cuerpos midiendo las distancias entre estos y diferentes partes de SR. En la vida diaria usamos a la Tierra como marco de referencia. Si vamos en un avión nuestro SR es avión mismo. Para determinar la posición de una partícula bastan tres distancias (coordenadas). El **punto** del espacio físico ocupado por una partícula es una abstracción matemática, cuya propiedad es tener las mismas coordenadas que la partícula. Se supone que el punto exista aún cuando no haya partícula presente. Los puntos del espacio físico representan las potenciales posiciones que pueden ocupar las partículas. El conjunto de los puntos constituye el **espacio** físico ligado (o relativo) al marco de referencia. Como bastan tres coordenadas para determinar la posición decimos que el espacio tiene tres dimensiones. A cada SR le corresponde un espacio físico ligado a él. Solamente un cuerpo rígido en reposo con respecto al SR puede compartir con él un mismo espacio físico. Un concepto que algunas veces se confunde con el SR es el de sistema de coordenadas. Para un SR hay infinitas maneras de definir un sistemas de coordenadas.

La geometría del espacio físico

Inicialmente la Geometría (Geo = Tierra y metría = medición) era el arte de los topógrafos y agrimensores. Con el tiempo se fueron encontrando empíricamente las propiedades de las figuras geométricas. Por ejemplo el teorema de Pitágoras era conocido empíricamente antes de que Pitágoras lo demostrara. En ese tiempo la Geometría era parte de la Física en el sentido de que dependía del experimento. Con el tiempo las relaciones geométricas se fueron sistematizando y deduciendo unas de otras, hasta que en el siglo IV a.C. Euclides, matemático griego de Alejandría de Egipto, publicó un tratado en el que deducía el conocimiento geométrico de su época a partir de ciertos postulados no demostrados (axiomas). Las aserciones demostradas eran los teoremas. A este punto la Geometría dejo de ser física para convertirse en matemática. Pero había un malentendido en la naturaleza de las teorías matemáticas. Para Euclides los axiomas eran verdades "tan evidentes" que no necesitaban comprobación. Por consiguiente por más de 2000 años se pensó que había **una única geometría posible**. Pero había un axioma que a muchos no les parecía evidente: *Dada una recta y un punto hay una sola recta paralela a la recta dada que pasa por el punto.* Por siglos muchos trataron infructuosamente de demostrar el axioma de las paralelas a partir de los otros axiomas de Euclides. Fue en el siglo XIX cuando el matemático ruso Nicolás Lobachevsky demostró que había geometrías consistentes en las que se substituía el postulado de las paralelas por otro en el que no había paralelas o había infinitas. Fue un punto crucial en la historia de las matemáticas. Se comprendió que los axiomas no eran "verdades evidentes que no necesitan demostración", como decía Euclides, sino más bien proposiciones arbitrarias que se suponen verdaderas a priori. Lo único que debe satisfacer un conjunto de axiomas es no ser incompatibles. Si se incluye un nuevo axioma en una teoría matemática se obtiene una teoría más particular que la teoría original. Si cambiamos un axioma por otro se obtiene una nueva teoría. No habría "una" geometría sino muchas posibles.

Para hacernos una idea de como sea posible que haya varias geometrías imaginémonos que fuéramos seres bidimensionales que viven en la superficie de una esfera. Podríamos estudiar la geometría de nuestro espacio (2D). En vez de la recta entre dos puntos hablaríamos de la geodésica, o sea la línea de menor longitud entre los puntos. Descubriríamos que el espacio no sería plano sino curvo. Por ejemplo la suma de los ángulos internos de un triángulo sería mayor de 180º. Es importante notar que a una escala mucho más pequeña que el radio de la esfera la curvatura del espacio no se podría apreciar.

Habiendo, no una, sino infinitas geometrías posibles se plantea entonces la siguiente pregunta física: *¿Cuál es la geometría del espacio físico?*.

¿Cómo podemos responder esta pregunta a la luz de nuestros conocimientos actuales? Según la teoría actual de la gravedad (Relatividad General) la geometría del espacio depende del movimiento y distribución de las masas, o sea que es dinámica. En ausencia de grandes masas los espacios físicos relativos a sistemas de referencia **inerciales** (de los que se tratará en detalle al estudiar la Dinámica) tienen una geometría Euclídea. Los sistemas de referencia no-inerciales o acelerados, aún en ausencia de masas, tienen una geometría no-Euclídea, siendo el radio de curvatura del espacio del orden de c^2/a, donde c es la velocidad de la luz y a la aceleración.

En resumen podemos esperar que la curvatura del espacio sea apreciable:

1. En las cercanías de masas muy grandes.
2. En sistemas de referencia fuertemente acelerados.
3. A distancias del orden del tamaño del Universo.

En la mecánica Newtoniana, que es lo que estudiaremos en lo que sigue, se asume un espacio-tiempo Galileano, o sea un espacio Euclídeo para todos los sistemas de referencia y un tiempo **absoluto**, el mismo para todos los relojes independientemente de su movimiento.

Vectores geométricos

La teoría de vectores es un capítulo de la geometría Euclídea que permite tratar problema geométricos complejos con técnicas algebraicas. Llamemos $\mathcal{E}$ a un espacio Euclídeo tridimensional. Empecemos por definir los segmentos orientados.

Definición 1. *Dados dos puntos A y B del espacio $\mathcal{E}$ el segmento orientado AB es el par ordenado (A, B). El punto A es el punto inicial y B el final.*

Los segmentos orientados son simplemente los elementos de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$. Representamos los segmentos orientados con una flecha que va del punto inicial A al punto final B.

Definición 2. *Se denominan nulos los segmentos orientados que inician y terminan en el mismo punto.*

Definición 3. *La magnitud de un segmento orientado AB es la distancia $\overline{AB}$ entre los puntos A y B.*

Teorema 1. *Un segmento orientado es nulo si y sólo si su magnitud es cero.*

Esto es debido a que $\overline{AA} = 0$ y a que $A \neq B \Longrightarrow \overline{AB} > 0$.

Definición 4. *Dos segmentos orientados no nulos AB y CD son paralelos si la recta r_1 que pasa por los puntos A y B y la recta r_2 que pasa por los puntos C y D son paralelas. Escribimos $AB \parallel CD$.*

Diremos que un segmento es paralelo a una recta si es paralelo a algún segmento orientado de la recta. También hablaremos de segmentos orientados paralelos a un plano cuando lo sean con una recta contenida en el plano.

Por convención consideraremos que los segmentos orientados nulos son paralelos a cualquier otro segmento orientado.

Una dirección es un conjunto de todas las rectas paralelas entre sí, es decir la dirección es lo que las rectas paralelas tienen en común entre si. Podemos entonces decir que dos segmentos orientados paralelos tienen la misma dirección.

Pasaremos ahora a definir segmentos orientados con el mismo sentido.

Definición 5. *Dos segmentos orientados no nulos AB y CD pertenecientes a la misma recta tienen el mismo sentido si la semirecta s_1 que se origina en A y contiene B y la semirecta s_2 que se origina en C y contiene D están la una contenida en la otra ($s_1 \subset s_2$ o $s_2 \subset s_1$).*

Definición 6. *Dos segmentos orientados paralelos AB y CD no pertenecientes a la misma recta tienen el mismo sentido si los segmentos de recta AC y BD no se cruzan.*

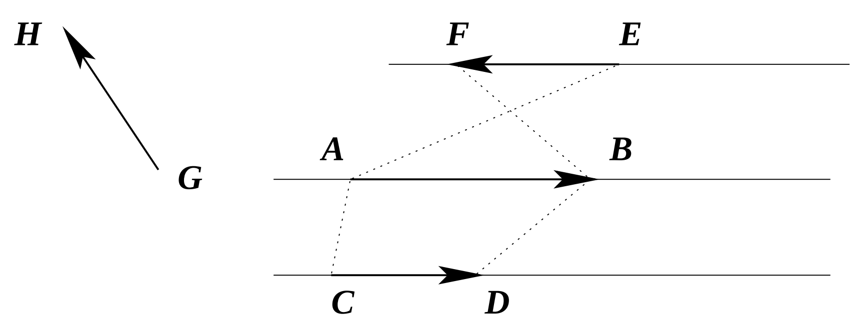

Fig. 2.1

AB y GH no son paralelos. AB y CD son paralelos del mismo sentido. AB y EF son paralelos de sentido contrario.

Definición 7. *AB es equipolente a CD si*

a) *ambos son nulos, $\overline{AB} = \overline{CD} = 0$, o*

b)

1. *$AB \parallel CD$*
2. *$\overline{AB} = \overline{CD} > 0$*
3. *AB y CD tienen el mismo sentido.*

Los segmentos orientados equipolentes son los que tienen las mismas dirección y magnitud y el mismo sentido.

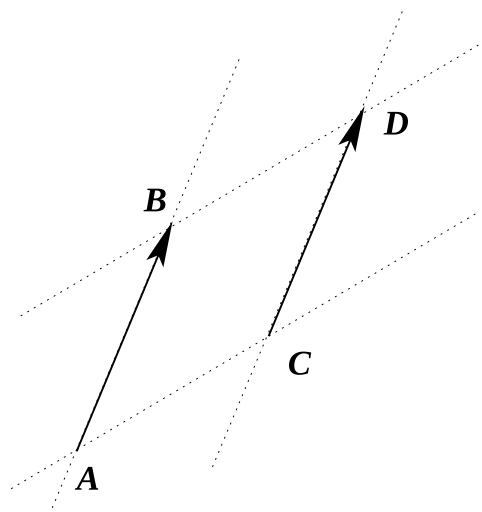

Fig. 2.2. Segmentos orientados equipolentes. $ABDC$ es un paralelogramo.

Teorema 2. *"Ser equipolente a" es una relación de equivalencia.*

Esto es, es una relación que debe ser:

1. *reflexiva* (AB es equipolente a AB),
2. *simétrica* (AB equipolente a CD implica CD equipolente a AB) y
3. *transitiva* (AB equipolente a CD y CD equipolente a EF implica AB equipolente a EF).

Definición 8. *Un vector es una clase de equivalencia de la equipolencia de los segmentos orientados.*

Denominamos $\overrightarrow{AB}$ al vector al que pertenece el segmento orientado AB.

Definición 9.

$$\overrightarrow{AB} = \{CD \mid CD \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \quad \mathbf{y} \quad CD \text{ equipolente a } AB\}$$

.

Definición 10. *Denominamos $\mathcal{V}$ al conjunto de los vectores*

Esto es $\mathcal{V} = \mathcal{E} \times \mathcal{E}/\text{equipolencia}$. Para distinguir las variables numéricas de las vectoriales se escribirá una flecha sobre estas últimas. Esto es, si escribimos $\vec{v}$ entendemos que se trata de un vector. En los libros es común usar variables en negritas ($\boldsymbol{v}$) en vez de flechas. Para representar un vector podemos usar uno cualquiera de los segmentos orientados pertenecientes a él.

Debido a que todos los segmentos orientados nulos son equipolentes podemos hacer la siguiente definición.

Definición 11. *El vector nulo es el vector correspondiente a los segmentos orientados nulos.* $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$.

Usualmente, cuando no hay confusión, se omite la flecha sobre el cero.

Definición 12. *Se denomina módulo o magnitud de un vector a la magnitud de sus segmentos orientados.*

$$|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}.$$

Teorema 3.

$$|\vec{a}| = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}.$$

Teorema 4.

$$(\forall A)(A \in \mathcal{E})(\forall \vec{a})(\vec{a} \in \mathcal{V})(\exists! B)(B \in \mathcal{E}) \quad \overrightarrow{AB} = \vec{a}$$

En palabras: Para todo punto del espacio A y para todo vector $\vec{a}$ existe un solo punto B tal que el segmento orientado AB pertenezca al vector $\vec{a}$.

Demostración. Si $\vec{a} = 0$ el punto B debe coincidir con A. Si $\vec{a}$ no es nulo existe una sola recta r paralela a $\vec{a}$ que pasa por A. Hay dos puntos B' y B'' que pertenecen r y distan de A la magnitud de $\vec{a}$, $\overline{AB'} = \overline{AB''} = |\vec{a}|$. Uno de los segmentos orientados AB' y AB'' tiene el mismo sentido y el otro el opuesto que $\vec{a}$.

Hay una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio $\mathcal{E}$ y los vectores $\mathcal{V}$. Si escogemos $O \in \mathcal{E}$, $A \in \mathcal{E} \longleftrightarrow \overrightarrow{OA} \in \mathcal{V}$.

Desplazamientos

En Física los vectores geométricos pueden ser interpretados como desplazamientos. Si nos movemos del punto A al punto B, el vector $\overrightarrow{AB}$ es el desplazamiento.

Producto de un vector por un número

Lo interesante de los vectores es que podemos definir un conjunto de operaciones matemáticas entre ellos, la primera de las cuales es el producto por un número.

Definición 13. *Sean $c \in \mathbb{R}$ y $\vec{a} \in \mathcal{V}$*

$$\vec{b} = c\vec{a} \iff \begin{cases} \vec{b} \in \mathcal{V} \\ |\vec{b}| = |c|\,|\vec{a}| \\ \vec{b} \parallel \vec{a} \\ \vec{b} \text{ tiene el sentido de } \vec{a} \text{ si } c > 0 \text{ y tiene el sentido opuesto si } c < 0 \end{cases}$$

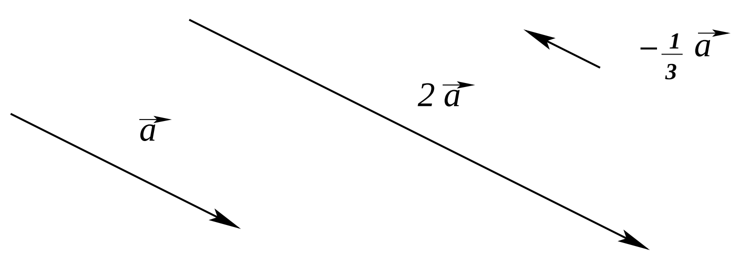

Fig. 2.3. Ejemplos de producto de un vector por un número.

Es fácil demostrar las siguientes propiedades del producto por un número.

Teorema 5. $c\vec{a} = \vec{0} \iff c = 0 \quad \text{o} \quad \vec{a} = \vec{0}$

$*$ **Teorema 6.** $1\vec{a} = \vec{a}$

$*$ **Teorema 7.** *El producto por un número es asociativo con el producto de números,*

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}.$$

Teorema 8. *Si* $\vec{a} \neq \vec{0}$ *y* $\vec{b} \neq \vec{0}$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff (\exists\alpha)(\alpha \in \mathbb{R})\ \vec{a} = \alpha\vec{b}$$

Suma de vectores

Si nos desplazamos de un punto A a un punto B y luego del punto B a un punto C, el desplazamiento neto es el que nos lleva del punto A al punto C. Esto nos sugiere la conveniencia de definir una suma de vectores como sigue.

Definición 14. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

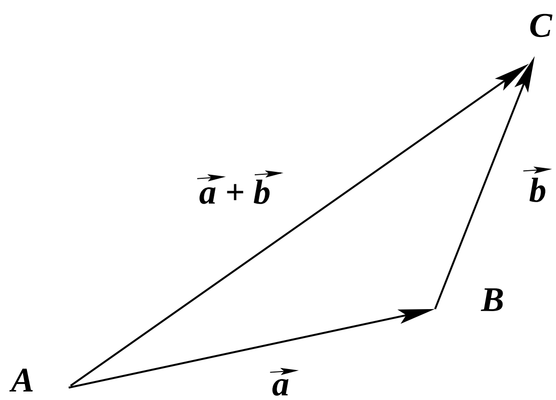

Fig. 2.4. Suma de vectores

La suma de vectores tiene las siguientes propiedades.

$*$ **Teorema 9.** *La suma de vectores es conmutativa,*

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Demostración. Sea AB un segmento ordenado cualquiera del vector $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ y C el punto tal que $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Por la definición de suma $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Sea D el punto tal que $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ y el punto C' tal que $\overrightarrow{DC'} = \vec{a}$. Por la definición de suma, $\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{AC'}$ Como los puntos A,B, C y D forman un paralelogramo debe necesariamente ser $C = C'$.

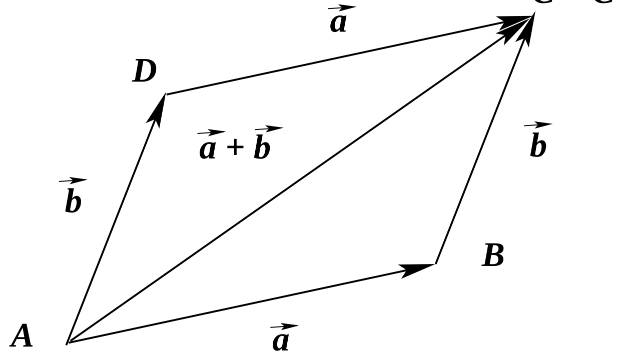

Fig. 2.5. Propiedad conmutativa de la suma

$*$ **Teorema 10.** *La suma de vectores es asociativa*

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

Demostración. Sean $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ y $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$, entonces

$$\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

y

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

$*$ **Teorema 11.** $\vec{0}$ *es un elemento neutro de la suma,*

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

Demostración. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$.

$*$ **Teorema 12.** *Todo vector $\vec{a}$ tiene un opuesto $-\vec{a}$ tal que $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.*

Demostración. Sea $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, si ponemos $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ se obtiene $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.
La demostración de los próximos dos teoremas es más o menos inmediata.

Teorema 13. $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$

$*$ **Teorema 14.** *El producto tiene la propiedad distributiva respecto a la suma de números*

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}.$$

$*$ **Teorema 15.** *El producto tiene la propiedad distributiva respecto a la suma de vectores*

$$\beta(\vec{a} + \vec{b}) = \beta\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

La demostración de este teorema se basa en que los lados de triángulos semejantes son proporcionales, como se ve en la figura 2.6.

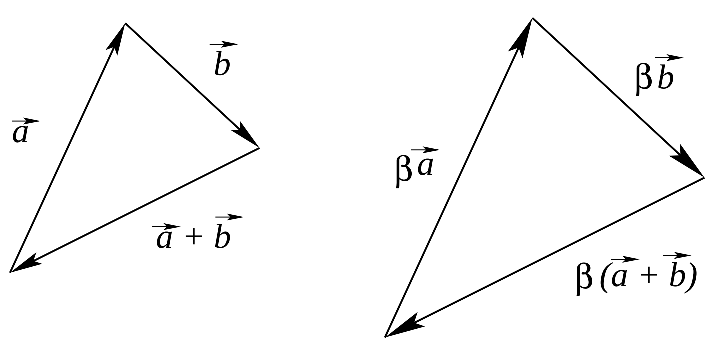

Fig. 2.6. Propiedad distributiva

Espacios vectoriales

En matemáticas se ha generalizado el concepto de vector y se define **espacio vectorial** a un conjunto $\mathcal{V}$ en el que se haya definido una suma y un producto por un número para los que valgan las propiedades correspondientes a los teoremas que hemos marcado con un asterisco (6, 7, 9, 10, 11, 12, 14 y 15). Por ejemplo son espacios vectoriales las matrices $n \times m$ y los polinomios.

Independencia lineal

Este tópico es válido para espacios vectoriales genéricos.

Definición 15. *Los vectores $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\ldots$, $\vec{a}_n$ son linealmente independientes si y sólo si*

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Teorema 16. *Si $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\ldots$, $\vec{a}_n$ son linealmente independientes y $k < n$ entonces $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\ldots$, $\vec{a}_k$ son linealmente independientes.*

Definición 16. *El espacio vectorial $\mathcal{V}$ tiene dimensión n si y sólo si*
1) Existe un conjunto de n vectores independientes
2) Cualquier conjunto de más de n vectores no es de vectores independientes.

Los monomios 1, x, x^2, x^3, $\ldots$ son linealmente independientes. Los polinomios de grado n forman un espacio vectorial de $n+1$ dimensiones.

Los vectores geométricos forman un espacio vectorial de 3 dimensiones.

Definición 17. *Si $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial de n dimensiones una base del espacio es cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes.*

Teorema 17. *Si $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial de n dimensiones y $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ son n vectores linealmente independientes, entonces*

$$(\forall \vec{a} \in \mathcal{V})(\exists!(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n) \quad \vec{a} = \alpha_1\vec{b}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{b}_n$$

Definición 18. *Si $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ es una base y $\vec{a} = \alpha_1\vec{b}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{b}_n$ los números α_k son las componentes del vector $\vec{a}$.*

Teorema 18. *Si $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ es una base, $\vec{a} = \alpha_1\vec{b}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{b}_n$ y $\vec{c} = \gamma_1\vec{b}_1 + \cdots + \gamma_n\vec{b}_n$, entonces*

$$\lambda\vec{a} = \lambda\alpha_1\vec{b}_1 + \cdots + \lambda\alpha_n\vec{b}_n$$

y

$$\vec{a} + \vec{c} = (\alpha_1 + \gamma_1)\vec{b}_1 + \cdots + (\alpha_n + \gamma_n)\vec{b}_n.$$

El producto por un número y la suma se reducen a las correspondientes operaciones sobre las componentes.

Coordenadas cartesianas oblicuas

El matemático y filósofo francés René Descartes inventó en el siglo XVII el método de localizar la posición de un punto mediante tres números, las coordenadas cartesianas. Considérese un punto arbitrario del espacio $O \in \mathcal{E}$ y tres rectas x, y y z que pasen por O y que no estén en un mismo plano. El punto O es el origen y las rectas son los ejes del sistema de coordenadas. Sean U, V y W sendos puntos que pertenecen a cada eje.

Las coordenadas de un punto arbitrario del espacio P se determinan de la siguiente manera:
Por el punto P pasa un solo plano paralelo a los ejes x y y. La intersección de ese plano con el eje z es un punto P_z. La intersección con el eje y del plano que pasa por P y es paralelo a los ejes x y z es un punto P_y y la intersección con el eje x del plano que pasa por P y es paralelo a los ejes y y z es el punto P_x. Las coordenadas ξ, η y ζ son los factores de proporcionalidad entre los vectores $\overrightarrow{OP}_x$, $\overrightarrow{OP}_y$ y $\overrightarrow{OP}_z$ y los vectores $\overrightarrow{OU}$, $\overrightarrow{OV}$ y $\overrightarrow{OW}$ respectivamente.

$$\overrightarrow{OP}_x = \xi\overrightarrow{OU}$$
$$\overrightarrow{OP}_y = \eta\overrightarrow{OV}$$
$$\overrightarrow{OP}_z = \zeta\overrightarrow{OW}$$

Escribimos $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ y

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_x + \overrightarrow{OP}_y + \overrightarrow{OP}_z = \xi\overrightarrow{OU} + \eta\overrightarrow{OV} + \zeta\overrightarrow{OW}.$$

Los vectores $\vec{b}_1 = \overrightarrow{OU}$, $\vec{b}_2 = \overrightarrow{OV}$ y $\vec{b}_3 = \overrightarrow{OW}$ forman una base. Para definir el sistema de coordenadas basta dar el origen O y la base $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$. Las coordenadas de P coinciden con las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$.

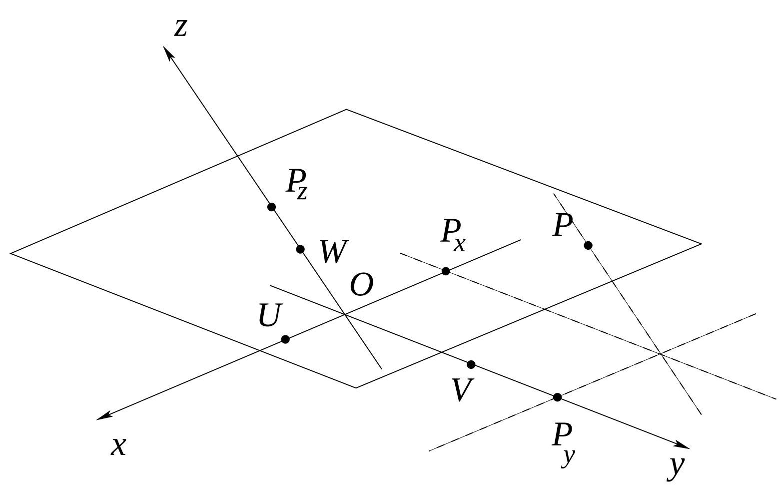

Fig. 2.7. Coordenadas cartesianas oblicuas

Teorema 18. *Si* $A \equiv (x_1, y_1, z_1)$ *y* $B \equiv (x_2, y_2, z_2)$ *entonces*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1)\vec{b}_1 + (y_2 - y_1)\vec{b}_2 + (z_2 - z_1)\vec{b}_3.$$

Ecuaciones paramétricas de una recta

Consideremos la recta que pasa por un punto A y es paralela al vector no nulo $\vec{a}$. Consideremos un punto genérico de la recta P, debe ser

$$\overrightarrow{AP} \parallel \vec{a} \iff \overrightarrow{AP} = \lambda\vec{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \iff \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si $A \equiv (x_A, y_A, z_a)$, $\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$ y $P \equiv (x, y, z)$ las ecuaciones de las coordenadas son

$$P(\lambda): \quad \begin{cases} x = x_A + \lambda a_x \\ y = y_A + \lambda a_y \\ z = z_A + \lambda a_z \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En el caso de que la recta esté en el plano xy se tienen dos ecuaciones con las que se puede eliminar el parámetro λ y obtener una ecuación implícita que se puede escribir como un determinante

$$\begin{vmatrix} x - x_A & a_x \\ y - y_A & a_y \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuaciones paramétricas de un plano

Consideremos el plano π que pasa por el punto $A \equiv (x_A, y_A, z_a)$ y es paralelo a los vectores $\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} \equiv (b_x, b_y, b_z)$. El punto genérico $P \equiv (x, y, z)$ del plano debe cumplir con

$$P \in \pi \iff \overrightarrow{AP} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \iff \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Para las coordenadas

$$P(\lambda, \mu): \quad \begin{cases} x = x_A + \lambda a_x + \mu b_x \\ y = y_A + \lambda a_y + \mu b_y \\ z = z_A + \lambda a_z + \mu b_z \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Eliminando los parámetros λ y μ se obtiene la ecuación implícita

$$\begin{vmatrix} x - x_A & a_x & b_x \\ y - y_A & a_y & b_y \\ z - z_A & a_z & b_z \end{vmatrix} = 0.$$

Cambio de base

Sea $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ una base y un vector $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$. En otra base $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ el vector tendrá otras componentes $\vec{a} = \alpha'_1\vec{b}_1 + \alpha'_2\vec{b}_2 + \alpha'_3\vec{b}_3$. Para encontrar la relación entre la componentes hay que expresar la vieja base en función de la nueva

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 =& R_{11}\vec{b}_1 + R_{21}\vec{b}_2 + R_{31}\vec{b}_3\\
\vec{e}_2 =& R_{12}\vec{b}_1 + R_{22}\vec{b}_2 + R_{32}\vec{b}_3\\
\vec{e}_3 =& R_{13}\vec{b}_1 + R_{23}\vec{b}_2 + R_{33}\vec{b}_3.
\end{aligned}$$

Substituyendo estas expresiones se obtiene

$$\begin{aligned}
\vec{a} =& (R_{11}\alpha_1 + R_{12}\alpha_2 + R_{13}\alpha_3)\vec{b}_1\\
&+ (R_{21}\alpha_1 + R_{22}\alpha_2 + R_{23}\alpha_3)\vec{b}_2\\
&+ (R_{31}\alpha_1 + R_{32}\alpha_2 + R_{33}\alpha_3)\vec{b}_3.
\end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned}
\alpha'_1 =& R_{11}\alpha_1 + R_{12}\alpha_2 + R_{13}\alpha_3\\
\alpha'_2 =& R_{21}\alpha_1 + R_{22}\alpha_2 + R_{23}\alpha_3\\
\alpha'_3 =& R_{31}\alpha_1 + R_{32}\alpha_2 + R_{33}\alpha_3 \ .
\end{aligned}$$

Usando el producto de matrices

$$\begin{pmatrix}\alpha'_1\\ \alpha'_2\\ \alpha'_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R_{11} & R_{12} & R_{13}\\ R_{21} & R_{22} & R_{23}\\ R_{31} & R_{32} & R_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_1 \equiv \begin{pmatrix}R_{11}\\ R_{21}\\ R_{31}\end{pmatrix} \ , \quad \vec{e}_2 \equiv \begin{pmatrix}R_{12}\\ R_{22}\\ R_{32}\end{pmatrix} \ , \quad \vec{e}_3 \equiv \begin{pmatrix}R_{13}\\ R_{23}\\ R_{33}\end{pmatrix} \ .$$

La independencia lineal de los vectores de la base implica que la matriz sea invertible

$$\begin{vmatrix}R_{11} & R_{12} & R_{13}\\ R_{21} & R_{22} & R_{23}\\ R_{31} & R_{32} & R_{33}\end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

Propiedades afines y propiedades métricas del espacio

Hay problemas geométricos que dependen del paralelismo, como por ejemplo sumar vectores, encontrar ecuaciones de rectas y planos etc. En estos problemas sólo es necesario comparar las longitudes de segmentos que sean paralelos. Se dice que dependen de las propiedades **afines** del espacio y se pueden estudiar perfectamente con coordenadas oblicuas. Otros problemas requieren comparar las longitudes de segmentos con direcciones diferentes, como por ejemplo los que se refieren a esferas y circunferencias, magnitudes de ángulos, perpendicularidad etc. Estos problemas dependen de las propiedades **métricas** del espacio. Para estos problemas es más conveniente usar coordenadas cartesianas ortonormales.

Coordenadas cartesianas ortonormales

Considérese un sistema de coordenadas cartesiano, determinado por los puntos O, U, V y W. El sistema se dice ortonormal si los ejes son ortogonales (perpendiculares) entre sí,

$$\overrightarrow{OU} \perp \overrightarrow{OV} \ , \qquad \overrightarrow{OU} \perp \overrightarrow{OW} \ , \qquad \overrightarrow{OV} \perp \overrightarrow{OW}$$

y se usa la misma unidad en los tres ejes, o sea los tres vectores de la base tienen la misma norma o magnitud

$$\overline{OU} = \overline{OV} = \overline{OW} = u \ .$$

Cuando estamos simplemente estudiando geometría podemos considerar que u es un número que podemos igualar a uno $u = 1$. Si estamos hablando del espacio físico u es una longitud, o sea una magnitud física. La discusión de este punto la dejaremos para más adelante.

Para los sistemas de coordenadas ortogonales las proyecciones de un punto sobre los ejes se pueden obtener con proyecciones ortogonales, porque el plano xy es perpendicular al eje z.

Definición 19. *Un vector $\vec{a}$ es unitario si $|\vec{a}| = 1$.*

Se usa escribir un acento circunflejo en vez de una flecha sobre el vector para indicar que es unitario $|\hat{a}| = 1$.

Definición 20. *Se llama versor de un vector $\vec{v}$ al vector unitario que tiene su misma dirección y sentido*

$$\hat{v} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} \ .$$

Definición 21. *Un conjunto de vectores es ortonormal, si son unitarios y ortogonales entre sí.*

Teorema 19. *Los vectores de un conjunto ortonormal son linealmente independientes.*

Las nomenclaturas más usadas para los versores de los ejes son

$$\overrightarrow{OU} = \hat{\imath} = \hat{x} = \hat{e}_1 \ , \qquad \overrightarrow{OV} = \hat{\jmath} = \hat{y} = \hat{e}_2 \ , \qquad \overrightarrow{OW} = \hat{k} = \hat{z} = \hat{e}_3 \ .$$

Teorema 20. *Si $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ es una base ortonormal y $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$ la norma del vector es*

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

La demostración se obtiene con la aplicación sucesiva del teorema de Pitágoras, como se puede ver en la figura 2.8.

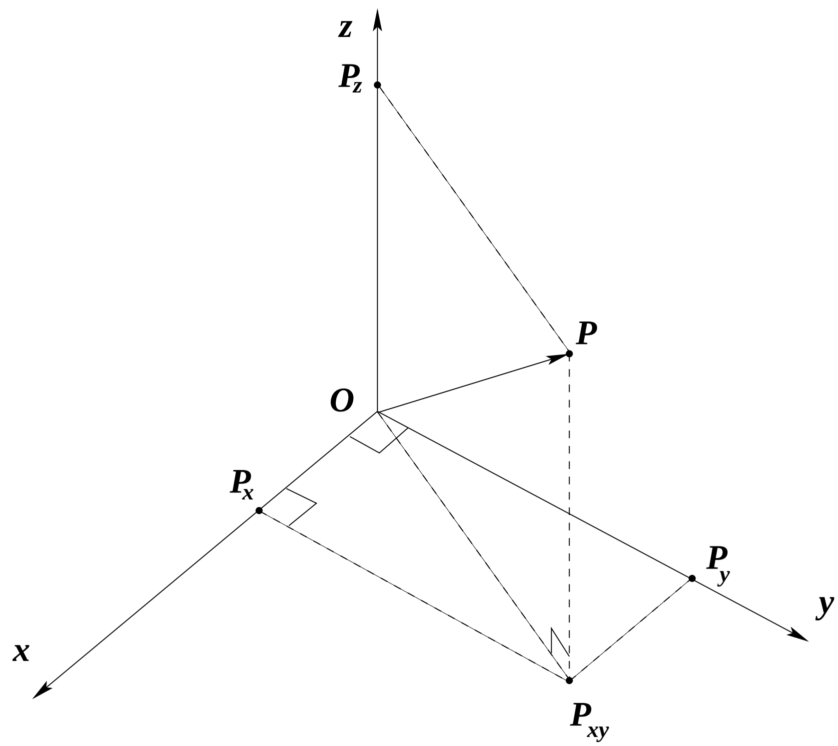

Fig. 2.8. Magnitud de un vector en coordenadas ortogonales

Consideremos un punto $P = (x, y, z)$ y sus proyecciones P_{xy} en el plano xy y P_x, P_y, P_z en los ejes. Los triángulos $OP_{xy}P$ y OP_xP_{xy} son rectángulos. La distancia entre el origen y P cumple con

$$\begin{aligned} \overline{OP}^2 &= \overline{OP_{xy}}^2 + \overline{P_{xy}P}^2 = \overline{OP_{xy}}^2 + \overline{OP_z}^2 \\ &= \overline{OP_x}^2 + \overline{P_xP_{xy}}^2 + \overline{OP_z}^2 = \overline{OP_x}^2 + \overline{OP_y}^2 + \overline{OP_z}^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \ , \end{aligned}$$

de donde sacando la raíz se obtiene

$$|\overrightarrow{OP}| = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ .$$

Componente de un vector sobre un eje. Producto escalar

Sean un vector $\vec{a}$ y una recta orientada u (eje). Sea θ el ángulo entre el vector y el eje ($0 \leq \theta \leq \pi$). La componente a_u del vector sobre el eje es un número cuyo valor absoluto es la magnitud de la proyección ortogonal del vector sobre el eje y el signo es negativo si $\pi/2 < \theta \leq \pi$ y positivo si $0 \leq \theta < \pi/2$. Resulta $a_u = |\vec{a}| \cos(\theta)$.

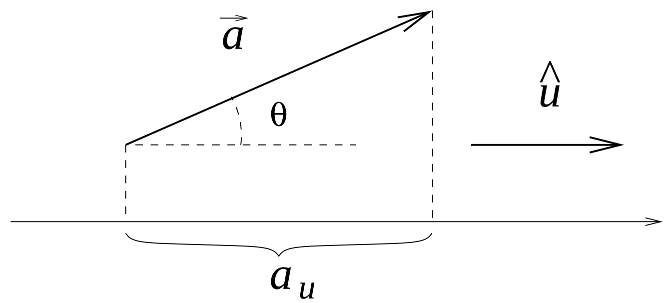

Fig. 2.9. Componente de un vector sobre un eje.

Definición 22. *Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y el ángulo θ entre ellos se define el producto escalar de los dos vectores como*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos(\theta) \ .$$

El producto escalar se denota con un punto entre los dos vectores.

La demostración de las siguiente cuatro propiedades del producto escalar se dejan al lector interesado.

Teorema 21. *Dado un eje u con versor $\hat{u}$ y un vector $\vec{a}$ la componente de $\vec{a}$ respecto al eje es $a_u = \vec{a} \cdot \hat{u}$.*

Teorema 22. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Teorema 23. *El producto escalar es conmutativo, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.*

Teorema 24. *El producto escalar es asociativo con el producto por un número*

$$\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} \ .$$

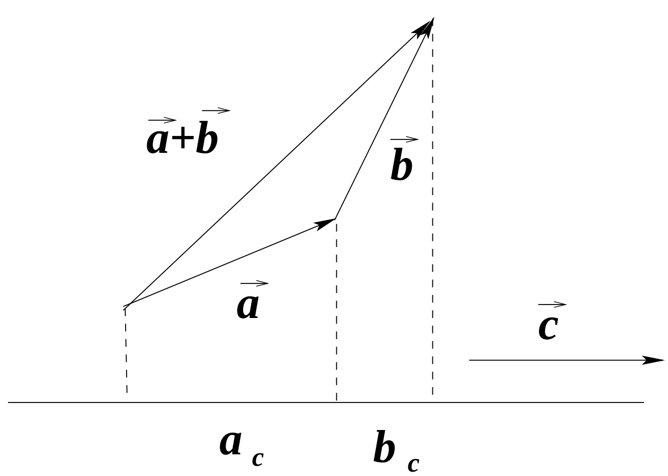

Fig. 2.10. Componente de una suma de vectores.

Teorema 25. *El producto escalar es distributivo*

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\,.$$

La demostración se basa en que las componentes se suman, como se puede ver en la figura 2.10. Si $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}$ entonces la componente de $\vec{d}$ es la suma de las componentes, $d_c=a_c+b_c$, y por lo tanto

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=d_c|\vec{c}|=(a_c+b_c)|\vec{c}|=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\,.$$

Si definimos que el vector nulo sea ortogonal a cualquier vector, vale

Teorema 26. $\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}.\vec{b}=0$.

Para la base ortonormal $\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}$ vale

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}=\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath}=\hat{k}\cdot\hat{k}=1$$

y

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath}=\hat{\jmath}\cdot\hat{k}=\hat{\imath}\cdot\hat{k}=0\ .$$

Con este resultado se obtiene fácilmente el siguiente teorema que permite calcular el producto conocidas las componentes de los vectores.

Teorema 27. *Si* $\vec{a}=a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k}$ *y* $\vec{b}=b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{k}$ *entonces*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\ .$$

La demostración es una simple aplicación de las propiedades distributiva y asociativa.

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}=&(a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{k})\\ =&a_xb_x\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}+a_xb_y\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath}+a_xb_z\hat{\imath}\cdot\hat{k}+\\ &a_yb_x\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath}+a_yb_y\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath}+a_yb_z\hat{\jmath}\cdot\hat{k}+\\ &a_zb_x\hat{k}\cdot\hat{\imath}+a_zb_y\hat{k}\cdot\hat{\jmath}+a_zb_z\hat{k}\cdot\hat{k}\\ =&a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\ .\end{aligned}$$

Este teorema es de gran importancia práctica porque permite reducir los cálculos trigonométricos a cálculos algebraicos. Por ejemplo el ángulo θ entre dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se puede obtener con

$$\cos(\theta)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}.$$

Teorema 28. *Si* $\vec{a}=a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k}$

$$a_x=\vec{a}\cdot\hat{\imath}\ ,\qquad a_y=\vec{a}\cdot\hat{\jmath}\ ,\qquad a_z=\vec{a}\cdot\hat{k}\ .$$

Teorema 29. $\vec{a}=|\vec{a}|(\cos(\alpha)\hat{\imath}+\cos(\beta)\hat{\jmath}+\cos(\gamma)\hat{k})$ *donde* α, β *y* γ *son los ángulos que forma el vector con los ejes.*

Las componentes del versor son los cosenos directores, $\hat{a}=\cos(\alpha)\hat{\imath}+\cos(\beta)\hat{\jmath}+\cos(\gamma)\hat{k}$ y por lo tanto $\cos^2(\alpha)+\cos^2(\beta)+\cos^2(\gamma)=1$.

Descomposición de un vector
Dado un vector $\vec{V}$ y un vector unitario $\hat{u}$ existe una sola manera en la que el vector $\vec{V}$ se descompone como la suma de vector paralelo y uno perpendicular a $\hat{u}$,

$$\vec{V} = \vec{V}_{\parallel} + \vec{V}_{\perp} \qquad \vec{V}_{\parallel} = (\vec{V} \cdot \hat{u})\hat{u}\ , \qquad \vec{V}_{\perp} = \vec{V} - (\vec{V} \cdot \hat{u})\hat{u}\ .$$

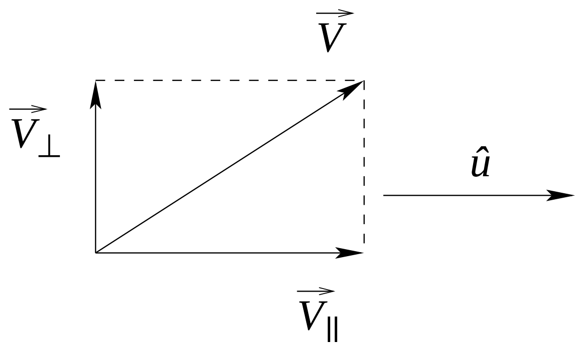

Fig. 2.11. Componentes paralela y perpendicular de un vector.

Producto vectorial

Consideremos el paralelogramo formado por dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. si consideramos a $\vec{a}$ como la base y si θ es el ángulo entre los vectores, la altura h será $|\vec{b}|\sin(\theta)$ y el área $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin(\theta)$.

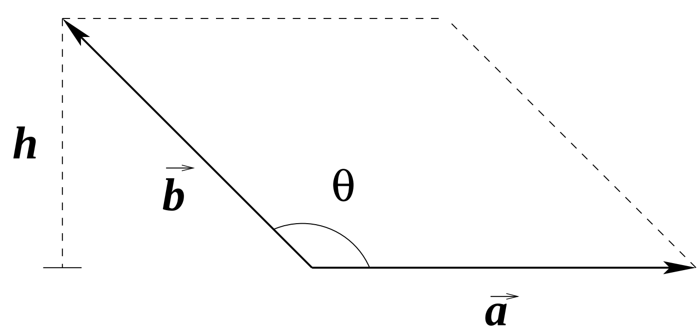

Fig. 2.12. Área de un paralelogramo.

Se define otro producto entre vectores, pero en este caso el resultado no es un número sino un vector, por lo que se llama producto vectorial.

Definición 23. *Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y el ángulo θ entre ellos se define el producto vectorial como*

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \iff \begin{cases} \vec{c} \in \mathcal{V} \\ |\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin(\theta) \\ \vec{c} \perp \vec{a} \quad \text{y} \quad \vec{c} \perp \vec{b} \\ \textit{el sentido se determina con la } \textbf{regla de la mano derecha} \end{cases}$$

Regla de la mano derecha. *Si ponemos los dedos pulgar, índice y medio de la mano derecha de forma de que sean perpendiculares entre sí, y $\vec{a}$ tiene el sentido del pulgar y $\vec{b}$ tiene el sentido del índice entonces el producto $\vec{a} \times \vec{b}$ tiene el sentido del dedo medio.*

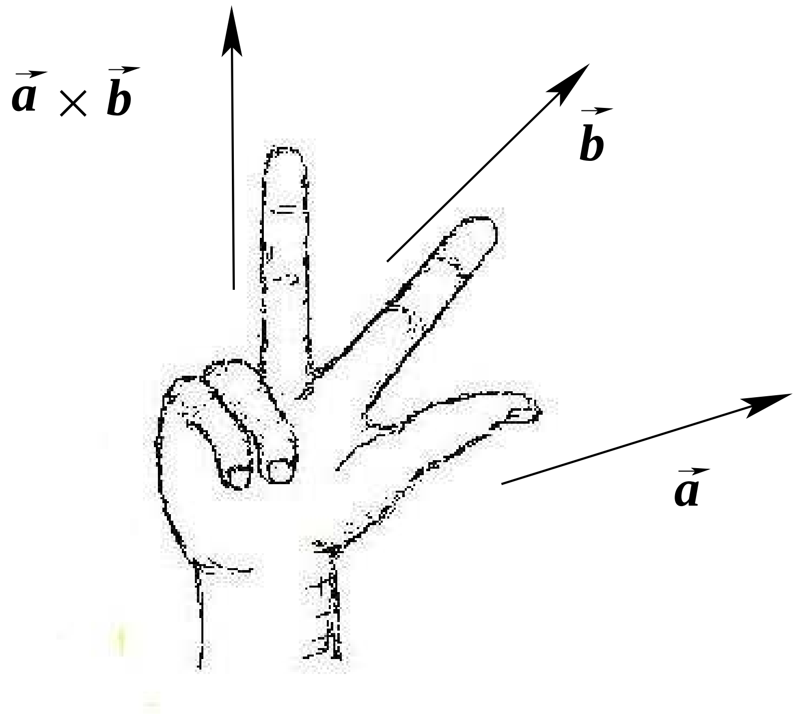

Fig. 2.13. Regla de la mano derecha.

La razón de una definición tan peculiar es que no existe ninguna forma puramente geométrica de distinguir la derecha de la izquierda.

A diferencia del producto escalar el producto vectorial no es conmutativo, pero si es distributivo y asociativo con el producto con por número. No es asociativo con él mismo, en general $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

Teorema 30. *El producto vectorial es anti-conmutativo*

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \; .$$

Teorema 31. *El producto vectorial es asociativo con el producto por un número*

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}) \; .$$

Si definimos que el vector nulo sea paralelo a cualquier otro vector vale

Teorema 32. $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \times \vec{b} = 0$

Teorema 33. $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}| \, |\vec{b}|$

Componente perpendicular y producto vectorial

La magnitud del producto vectorial de un vector unitario $\hat{u}$ por un vector $\vec{V}$ es igual a la magnitud de la componente perpendicular del vector $|\vec{V}_\perp| = |\vec{V}|\sin\theta$. El producto es por lo tanto igual a la componente perpendicular rotada un ángulo de 90^o alrededor de $\hat{u}$, como se puede ver en la figura 2.14.

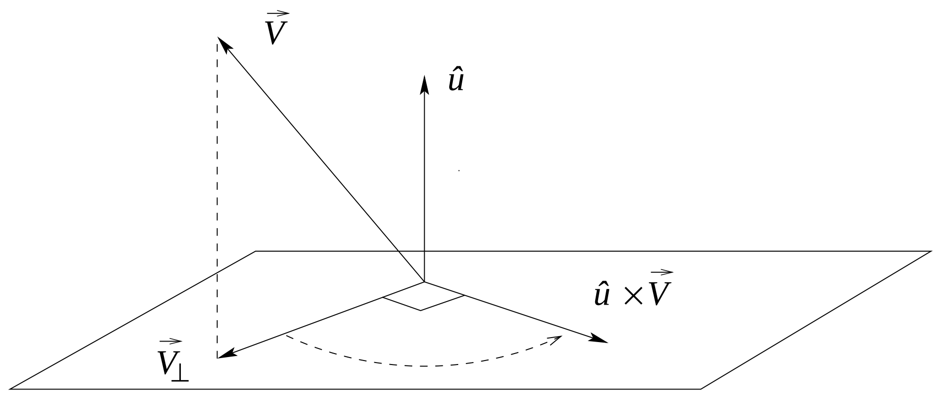

Fig. 2.14. Producto vectorial.

Teorema 34. *El producto vectorial es distributivo*

$$\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}\ .$$

Para demostrar esta importante propiedad basta constatar que la proyección de $\vec{a} + \vec{b}$ sobre el plano perpendicular a $\vec{c}$ es igual a la suma de las proyecciones (vease la figura 2.15),

$$(\vec{a} + \vec{b})_\perp = \vec{a}_\perp + \vec{b}_\perp\ .$$

Para obtener el producto vectorial hay que rotar un ángulo de 90^o alrededor de $\vec{c}$ y multiplicar por $|\vec{c}|$, operaciones que son ambas distributivas.

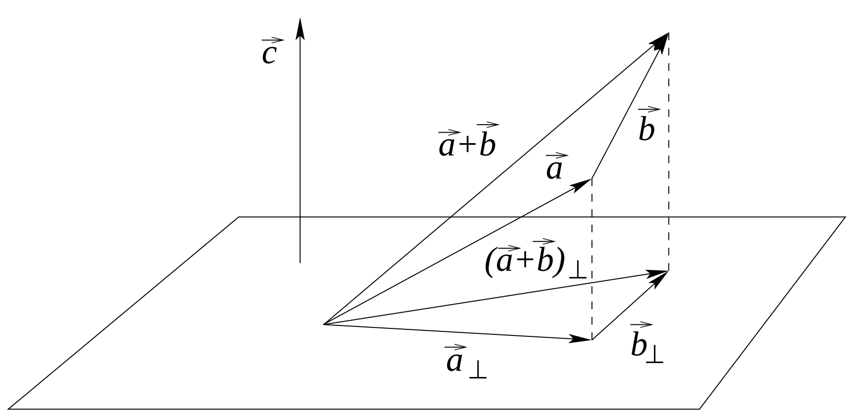

Fig. 2.15. Proyección ortogonal de una suma de vectores.

Sistemas de coordenadas derechos e izquierdos

A los efectos de calcular los productos vectoriales hay dos tipos de sistemas de coordenadas. Los sistemas derechos en los que $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ y los izquierdos en los que $\hat{x} \times \hat{y} = -\hat{z}$

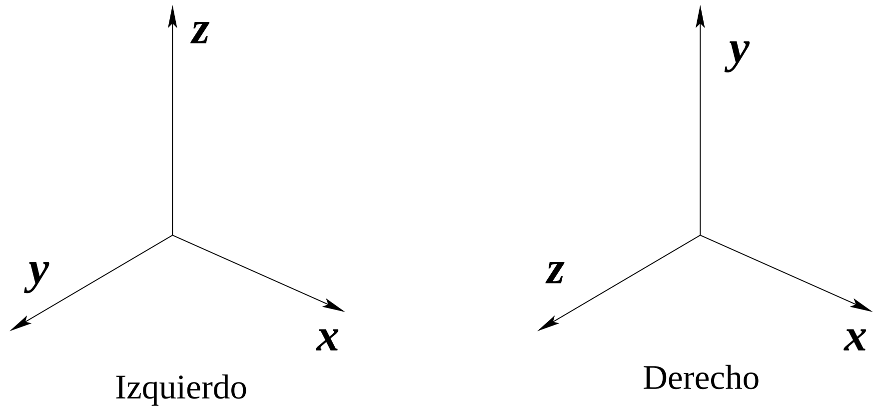

Fig. 2.16. Sistemas de coordenadas derechos e izquierdos.

La fórmula para calcular el producto vectorial es diferente en los dos tipos de sistemas de coordenadas. Para simplificarnos la vida, cada vez que estemos tratando con productos vectoriales usaremos solamente sistemas de coordenadas derechos.

Nótese que un cambio de sistema de coordenadas que sea una simple rotación no puede cambiar el tipo de sistema. Para eso es necesario que haya una inversión o reflexión.

Teorema 35. *Para una base ortonormal* $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \ .$$

Si la base es derecha

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \ , \qquad \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath} \ , \qquad \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$$

y si la base es izquierda

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{k} \ , \qquad \hat{\jmath} \times \hat{k} = -\hat{\imath} \ , \qquad \hat{k} \times \hat{\imath} = -\hat{\jmath} \ .$$

Usando estos resultados no presenta mayor problema probar el siguiente teorema.

Teorema 36. *Si* $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ *es una base ortonormal derecha y si* $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$ *y* $\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$ *entonces*

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\imath} - (a_x b_z - a_z b_x)\hat{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k} \ .$$

Este resultado se puede escribir de forma más compacta usando un determinante,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \end{vmatrix} \ .$$

Teorema 37. *Si* $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ *es una base ortonormal izquierda y si* $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$ *y* $\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$ *entonces*

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \end{vmatrix} \ .$$

La demostración de la siguiente identidad es bastante fácil aunque fastidiosa.

Teorema 38. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$.

Producto triple

Se puede combinar el producto vectorial con uno escalar para obtener un escalar que se denomina producto triple. Usando los teoremas 27 y 36 podemos deducir el siguiente teorema.

Teorema 39. *Para una base ortonormal derecha*

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} .$$

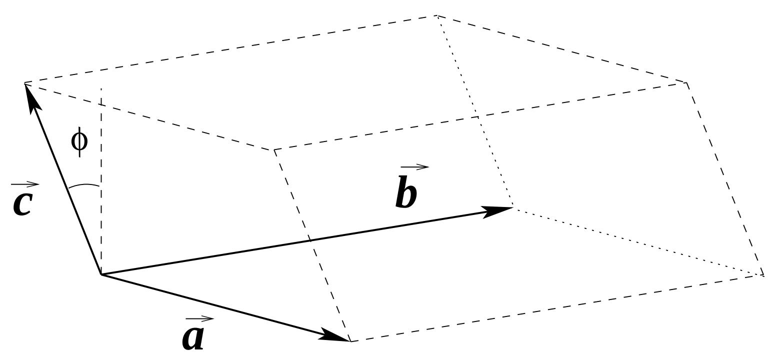

Fig. 2.17. Terna de vectores.

El significado geométrico del producto triple es el de volumen del paralelepípedo formado por la terna de vectores $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \, |\vec{c}| cos(\phi) ,$$

El área de la base es $|\vec{a} \times \vec{b}|$ mientras que $|\vec{c}|cos(\phi)$ es la altura.

Si los vectores son coplanares el producto triple se anula.

Teorema 39. *Sea una terna de vectores linealmente independientes* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. *Si la terna es derecha* $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} > 0$ *y si la terna es izquierda* $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} < 0$.

Ecuación implícita de un plano

Busquemos la ecuación de un plano π perpendicular a un vector $\vec{N} \equiv (N_x, N_y, N_z)$ y que pase por un punto $A \equiv (x_A, y_A, z_A)$. El vector que va del punto A a un punto genérico del plano P debe ser perpendicular al vector $\vec{N}$,

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{N} = 0 \; .$$

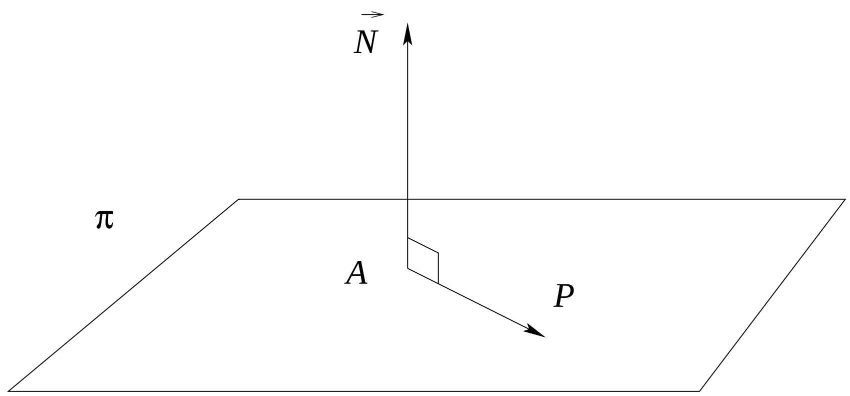

Fig. 2.18. Plano perpendicular a un vector.

Con las coordenadas

$$N_x(x - x_A) + N_y(y - y_A) + N_z(z - z_A) = 0 \; .$$

Vice versa si tenemos la ecuación implícita de un plano

$$ax + by + cz = d$$

podemos decir que el vector $\vec{N} \equiv (a, b, c)$ es perpendicular al plano.

Si en vez del vector perpendicular damos dos vectores paralelos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ podemos poner $\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b}$ con lo que la ecuación queda

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \overrightarrow{AP} = 0.$$

y en coordenadas

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ (x - x_A) & (y - y_A) & (z - z_A) \end{vmatrix} = 0$$

que es idéntica a la ecuación encontrada anteriormente.

Distancia entre dos rectas del espacio

Como un ejemplo de como problemas geométricos aparentemente complejos se resuelven simplemente usando vectores, consideremos dos rectas r_1 y r_2 que pasan por los puntos A y B y son paralelas a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ respectivamente. El problema es encontrar la distancia entre ellas. Sea C el punto de r_1 más cercano a r_2 y D el punto de r_2 más cercano a r_1. El segmento CD debe necesariamente ser perpendicular a ambas rectas. Por lo tanto CD es paralelo a $\vec{a} \times \vec{b}$. Por otra parte C es la proyección ortogonal de A sobre la recta CD y D es la proyección de B. Por lo tanto lo que hay que hacer para encontrar la distancia es encontrar la componente de $\overrightarrow{AB}$ en la dirección de CD. La distancia d es entonces

$$d = \overline{CD} = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} .$$

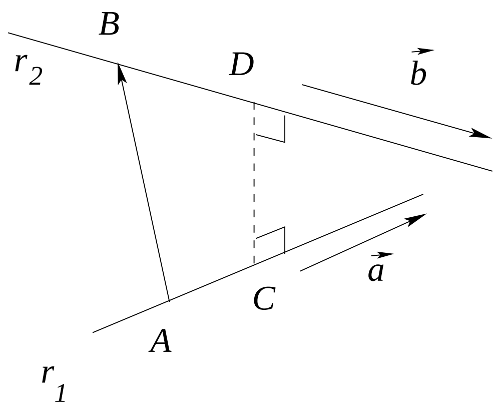

Fig. 2.19. Distancia entre dos rectas del espacio.

Cambios de bases ortonormales

En el cambio de base estudiado anteriormente supongamos que ambas bases sean ortormales. La vieja $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ y la nueva $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$, $\hat{b}_3$. Como las bases son ortonormales la componente de $\hat{e}_i$ en la dirección de $\hat{b}_k$, $R_{ki} = \hat{e}_i \cdot \hat{b}_k$ es igual a la componente de $\hat{b}_k$ en la dirección de $\hat{e}_i$. Esto es la matriz que da la nueva base en función de la vieja es la traspuesta de la anterior,

$$\begin{aligned}
\hat{b}_1 =& R_{11}\hat{e}_1 + R_{12}\hat{e}_2 + R_{13}\hat{e}_3 \\
\hat{b}_2 =& R_{21}\hat{e}_1 + R_{22}\hat{e}_2 + R_{23}\hat{e}_3 \\
\hat{b}_3 =& R_{31}\hat{e}_1 + R_{32}\hat{e}_2 + R_{33}\hat{e}_3 .
\end{aligned}$$

O sea para cambios de bases ortonormales la inversa de la matriz de transformación coincide con la traspuesta. Las matrices que tiene esa propiedad se llaman ortogonales. Supongamos que la base vieja $\{\hat{e}_k\}$ se una base derecha. Entonces el producto triple de la nueva base es igual al determinante de la matriz de transformación. Será 1 si la nueva base también es derecha y -1 si la nueva base es izquierda. Las matrices ortogonales que tienen determinante 1 se llaman rotaciones propias. Las que tienen -1 rotaciones impropias. Por ejemplo una reflexión con respecto al plano xy es una rotación impropia,

$$\hat{b}_1 = \hat{e}_1 , \qquad \hat{b}_2 = \hat{e}_2 , \qquad \hat{b}_3 = -\hat{e}_3 .$$

Magnitudes físicas escalares y vectoriales

En Física se llama escalares a las magnitudes que no se modifican cuando se cambia el sistema de coordenadas. Por ejemplo la distancia entre dos puntos, el tiempo, la masa, etc. También hay magnitudes vectoriales, que tienen tres componentes que se transforman como las componentes de los vectores geométricos. Como la matriz de transformación no tiene dimensiones (son números) las tres componentes de una magnitud vectorial deben tener las mismas dimensiones. Un aspecto importante de las magnitudes vectoriales es que, no solamente se pueden multiplicar por un número, sino que también se pueden multiplicar por una magnitud escalar con dimensiones. En este caso se obtiene **otra** magnitud vectorial. O sea es otro espacio vectorial. Consideremos por ejemplo los vectores desplazamiento que para el espacio físico corresponden a los vectores geométricos que hemos venido estudiando. Los desplazamientos tienen dimensiones de longitud. La magnitud de un desplazamiento $\overrightarrow{AB}$ es una longitud. Entonces el versor en la dirección de $\overrightarrow{AB}$,

$$\hat{v} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB}$$

no tiene dimensiones y por lo tanto no es un desplazamiento. Para los vectores desplazamiento la operación $\overrightarrow{AB} + \hat{v}$ es inválida.

Como los versores no tienen dimensiones son los mismos para todas las magnitudes vectoriales. Las dimensiones están en las componentes o coordenadas. Si $\vec{d} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ es un desplazamiento x, y y z tienen dimensiones de longitud. Simultáneamente puede haber una fuerza $\vec{F} = f_x\hat{\imath} + f_y\hat{\jmath} + f_z\hat{k}$. Las componentes tienen dimensiones de fuerza y no son homogéneas con el desplazamiento, pero los versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ $\hat{k}$ son los mismos. El espacio vectorial de las fuerzas es diferente al espacio de los desplazamientos.

Otro ejemplo. Si nos desplazamos del punto A al B en un tiempo t la velocidad vectorial media está dada por

$$\vec{v} = \frac{1}{t}\overrightarrow{AB}$$

que es una magnitud vectorial pero no es un desplazamiento porque tiene dimensiones lt^{-1}.

Transformaciones activas y pasivas. Inversión espacial

Consideremos un cambio de sistema de coordenadas compuesto por una translación y una rotación de los ejes. La posición de cualquier partícula queda igual pero sus nuevas coordenadas son diferentes. A esto lo llamamos una transformación de coordenadas **pasiva**. Pero podemos obtener el mismo cambio de coordenadas de otra manera. Se deja igual el sistema de coordenadas y se translada y rota a todas las partículas del sistema físico en estudio, con la translación y rotación inversas. A esto se le llama la transformación **activa**. Cuando la rotación es propia no hay mayor problema, pero cuando es impropia como por ejemplo una inversión espacial, la transformación activa implica la reconstrucción de todos los objetos para formar su imagen especular, lo cual en la práctica es imposible. Sin embargo siempre podemos imaginarnos como se comportaría un hipotético sistema invertido.

Vectores polares y vectores axiales. Escalares impares

Ante una inversión espacial activa los desplazamientos cambian signo $\vec{d} \to -\vec{d}$. Los vectores que se comportan de esa manera son los vectores **polares**. Veamos en cambio como se comporta el producto vectorial de dos vectores polares

$$\vec{a} \times \vec{b} \to (-\vec{a}) \times (-\vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}$$

O sea el producto no cambia signo. Vectores que se comporten como el producto vectorial son los vectores **axiales**. La razón de este comportamiento es que con una inversión activa una mano derecha se convierte en izquierda, pero la regla a aplicar debe seguir siendo la de la mano derecha. El producto vectorial de un vector polar por un vector axial es un vector polar. El producto de dos vectores axiales es un vector axial.

Son vectores polares el desplazamiento, la velocidad y la fuerza. Son vectores axiales la velocidad angular, el torque y el campo magnético.

El producto escalar de un vector polar por uno axial cambia signo ante la inversión activa. Magnitudes con esa propiedad se dicen escalares **impares**. Un ejemplo es el producto triple de tres vectores polares. El cambio de signo se debe a que las ternas izquierdas se convierten en derechas y viceversa.

Pseudovectores y pseudoescalares

Con la definición que hemos dado de producto vectorial (definición 23) el resultado se comporta como un vector, o sea en los cambios de base se transforma como los vectores geométricos. El producto triple es un escalar: es invariante ante todo cambio de coordenadas.

Sin embargo, algunas veces se define el producto vectorial con la fórmula del teorema 36. En ese caso el producto no es en realidad un vector, se transforma como vector solamente en las rotaciones propias. En las rotaciones impropias cambia signo. Decimos que es un pseudovector. Análogamente el producto triple no sería un verdadero escalar, cambiaría signo en las rotaciones impropias. Decimos que es un pseudoescalar.

Si nos limitamos a usar bases derechas no hay diferencia entre las dos definiciones y los conceptos de vector axial y pseudovector coinciden.

Unidad 3

Cinemática

Referencial y sistema de coordenadas

La Cinemática es la parte de la Mecánica que se ocupa de la descripción de los movimientos. El nombre proviene del griego $\kappa\iota\nu\eta\mu\alpha$ que significa movimiento. Lo primero que se necesita para estudiar un movimiento es establecer el marco de referencia, o sea los cuerpos que consideramos en reposo, un sistema de coordenadas y un tiempo común a todo el marco de referencia. Una partícula en movimiento ocupará al trascurrir del tiempo diferentes posiciones $P(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))$. Toda la información sobre el movimiento está contenida en la funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$.

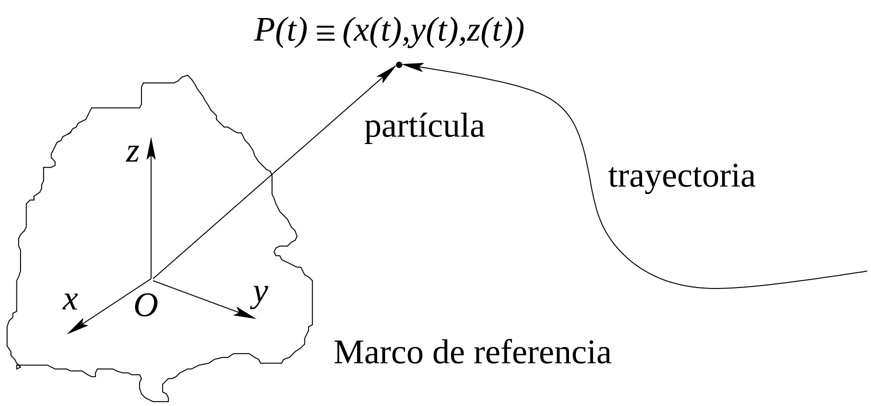

Fig. 3.1. Partícula en movimiento.

Trayectoria y ley horaria

Los puntos ocupados sucesivamente por el móvil forman una curva que se llama **trayectoria**. El movimiento mismo es una ecuación paramétrica de la trayectoria. La trayectoria y la manera como se la recorre determinan el movimiento. En muchos casos los movimientos suceden en trayectorias preestablecidas, como por ejemplo el movimiento de un tren sobre sus rieles.

La posición del móvil sobre la trayectoria se puede encontrar con una coordenada curvilínea. Esta se establece de la siguiente manera. Se escoge un punto de la trayectoria O como origen y un sentido positivo para recorrer la curva. El valor absoluto de la coordenada s de un punto P representa la distancia, medida a lo largo de la trayectoria, entre un origen O y el punto P, esto es la longitud del arco $\widehat{OP}$. El signo es positivo si el arco $\widehat{OP}$ tiene el mismo sentido que el escogido para la curva. El ejemplo típico son los kilótmetros en una carretera.

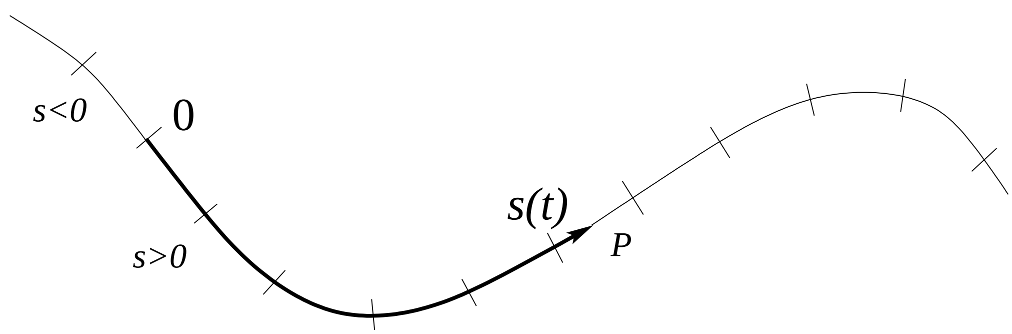

Fig. 3.2. Coordenada curvilínea sobre la trayectoria.

Fijada la trayectoria, el movimiento está determinado por el valor de la coordenada en función del tiempo $s(t)$. Esta función se llama **ley horaria**. Este nombre proviene de los controladores de trenes. En la figura 3.3 se presenta el gráfico de una ley horaria. Veamos qué podemos deducir sobre el movimiento a partir del gráfico.

Para tiempos menores que t_m la coordenada s disminuye, el móvil se acerca al origen y el movimiento es en el sentido negativo. En el instante t_m la partícula llega al valor mínimo de la coordenada s_m. Para instantes posteriores el movimiento es en sentido positivo (s creciente) alejandose del origen.

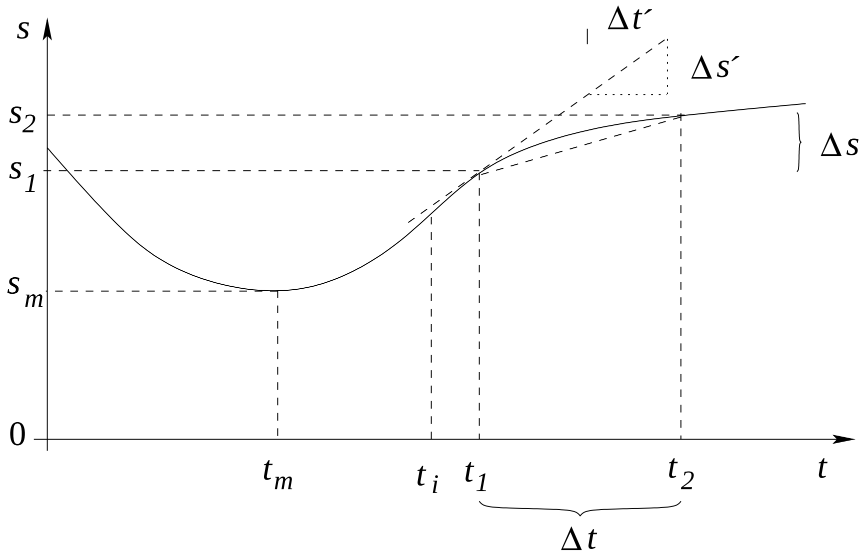

Fig. 3.3. Ley horaria

Esto con respecto al sentido del movimiento. ¿Qué podemos decir sobre la rapidez del movimiento? A medida que el móvil se acerca al punto de retorno ($s = s_m$) el movimiento se hace más lento, se para instantaneamente en el instante t_m y luego se mueve en sentido contrario cada vez más rapidamente. Posteriormente el movimiento se enlentece nuevamente. El movimiento es más rápido en el instante t_1 que en t_2. ¿Qué aspecto del gráfico usamos para hacer estas afirmaciones? La inclinación de la curva. A mayor inclinación mayor rapidez. La pendiente es la medida de la inclinación de algo, por ejemplo decimos que una rampa tiene una pendiente de 10% si sube diez centímetros por cada metro de desplazamiento horizontal. Podemos usar la pendiente de la curva del gráfico para medir la rapidez. Por ejemplo la pediente de la recta secante al gráfico que pasa por los puntos (t_1, s_2) y (t_2, s_2) del gráfico es una medida de la velocidad promedio en el lapso $[t_1, t_2]$.

Velocidad escalar media

Si el móvil se desplaza de la posición s_1 a la s_2 en el lapso de t_1 a t_2, la velocidad escalar media en el lapso $[t_1, t_2]$ es

$$\overline{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

El signo de la velocidad indica el sentido del movimiento. El valor absoluto es la rapidez. Las dimensiones de la velocidad son $[v] = lt^{-1}$. No hay un nombre especial para la unidad de velocidad. La unidad internacional es el m/s pero también se usa mucho el km/hora.

Velocidad escalar instantánea

Para definir la velocidad en un instante hay que usar la pendiente de la recta tangente. Al acercar el punto t_2 al punto t_1 la recta secante se aproxima a la tangente, por lo tanto la pendiente de la secante (la velocidad media) se aproxima a la pendiente de la tangente (la velocidad instantánea). Esto no es sino la definición de derivada de $s(t)$ con respecto al tiempo. La velocidad en el instante t_1 es entonces

$$v(t_1) = \frac{\Delta s'}{\Delta t'} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_1} .$$

En general

$$v(t) = \frac{ds}{dt} .$$

En la figura 3.4 hay el gráfico de la velocidad contra el tiempo correspondiente a la curva horaria de la figura 3.3. En el instante t_m la velocidad se anula y en el punto de inflexión t_i la velocidad se hace máxima. Para tiempos anteriores a t_m la velocidad es negativa, para $t > t_m$ es positiva.

Como cantidad con signo la velocidad crece continuamente para $t < t_i$ y decrece para $t > t_i$. En cambio la rapidez decrece para $t < t_m$, crece para $t_m < t < t_i$ y decrece para $t > t_i$. Llamamos movimiento retardado uno el que la rapidez decrece. El movimiento es retardado para $t < t_m$ y para $t > t_i$.

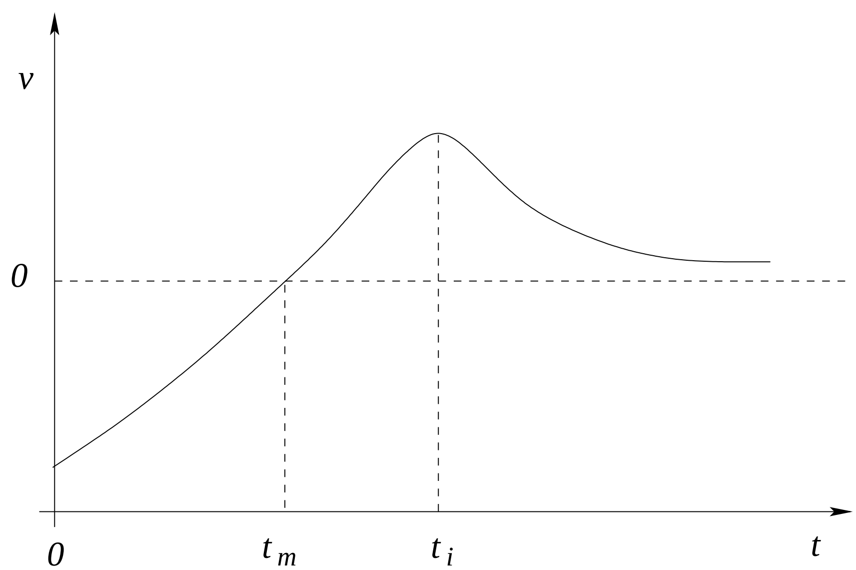

Fig. 3.4. v *vs.* t para la curva horaria de la figura 3.3

Aceleración escalar

Para describir la forma en la que varía la velocidad de un móvil se usa la aceleración escalar a, que definimos como la derivada de la velocidad respecto al tiempo

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \ .$$

Las dimensiones de la aceleración son $[a] = lt^{-2}$ y la unidad es el m/s^2.

La aceleración es positiva en las regiones en las que la curva horaria tiene la concavidad hacia arriba y negativa en las partes con la concavidad es hacia abajo. La aceleración se anula en los puntos de inflexión, donde la velocidad tiene máximos o mínimos. En la siguiente figura se grafica la aceleración correspondiente a la ley horaria de la figura 3.3

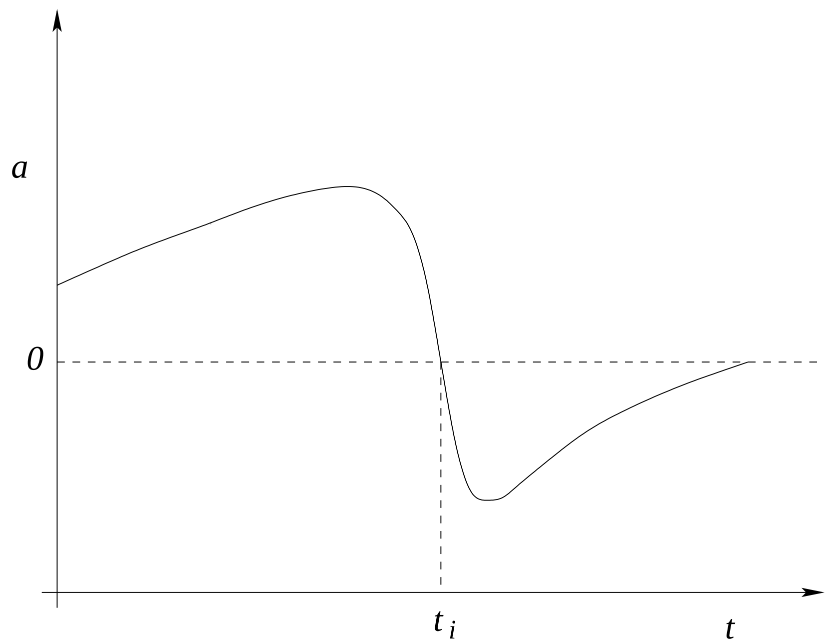

Fig. 3.5. *a vs. t* para la curva horaria de la figura 3.3

El movimiento en el que la rapidez disminuye $\frac{d|v|}{dt} < 0$ es retardado. Esto sucede cuando la aceleración y la velocidad tienen sentidos opuestos. Cuando $av > 0$ la rapidez aumenta. Algunas veces se dice acelerado el movimiento en el que la rapidez aumenta, lamentablemente esta nomenclatura es ambigua porque un movimiento retardado también es acelerado en el sentido de que tiene aceleración, aunque esta sea opuesta a la velocidad.

Movimiento uniforme

El movimiento uniforme es el que tiene velocidad constante, esto es aceleración cero.

$$v(t) = v_0 \ .$$

La curva horaria debe tener pendiente constante, o sea es una recta, lo que corresponde a la función afín

$$s(t) = s_0 + v_0 t \ .$$

La constante s_0 es la posición en el tiempo cero.

Movimiento uniformemente acelerado

Es el movimiento que tiene aceleración constante,

$$a(t) = a_0 \ .$$

La función $v(t)$ debe ser la función afín,

$$v(t) = v_0 + a_0 t \ .$$

La constante v_0 es la velocidad al instante $t = 0$.

La ley horaria es un poquito más complicada de encontrar. La función t^2 tiene como derivada $2t$, entonces la posición debe ser

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \ .$$

La constante s_0 es la posición al tiempo cero. La curva horaria resulta una parábola. El vértice de la parábola corresponde a un punto de retorno en el que la velocidad se anula. Para tiempos anteriores al punto de retorno ($t = -v_0/a_0$) el movimiento es retardado.

Movimiento oscilatorio armónico simple

Como un ejemplo menos trivial consideremos la siguiente ley horaria

$$s = A \sin(\omega t) \ ,$$

donde A es una constante con dimensiones de longitud y ω es una constante con dimensiones de inverso de tiempo. El movimiento es una oscilación de período $T = 2\pi/\omega$ y **amplitud** A. La constante ω se llama **frecuencia angular**. La frecuencia, o sea el número de oscilaciones por unidad de tiempo es $f = 1/T = \omega/(2\pi)$. El argumento del seno se llama **fase**.

La velocidad es

$$v = \frac{ds}{dt} = A\omega \cos(\omega t)$$

y la aceleración

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t) \ .$$

Vale la relación

$$a = -\omega^2 s.$$

El problema inverso

Supongamos que conocemos la función $v(t)$ y queremos encontrar el desplazamiento del cuerpo entre un instante inicial t_i y uno final t_f. Si el movimiento fuera uniforme con velocidad v_0 la solución sería muy fácil,

$$\Delta s = s_f - s_i = v_0(t_f - t_i) \; .$$

El problema está en que v varía en ese lapso. No podemos dar el resultado exacto pero sí podemos acotar el resultado. Si v_M y v_m son los valores máximo y mínimo de v en el lapso, debe ser

$$v_m(t_f - t_i) \leq \Delta s \leq v_M(t_f - t_i) \; .$$

Mientras menos cambie v, o sea mientras más cercanos estén v_m y v_M más exacta es la estimación. Podemos mejorar la estimación si subdividimos el lapso en n intervalos de ancho $\Delta t = (t_f - t_i)/n$, intervalos que podemos numerar con un índice k que va de 1 a n. En el lapso k, el desplazamiento es Δs_k, la velocidad mínima en el lapso será v'_k y la máxima v''_k. Se cumple para cada intervalo

$$v'_k \Delta t \leq \Delta s_k \leq v''_k \Delta t \; .$$

Sumemos ahora las n desigualdades

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \cdots + \Delta s_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k \; ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} v'_k \Delta t \leq \Delta s \leq \sum_{k=1}^{n} v''_k \Delta t \; .$$

Si n aumenta la suma de los mínimos aumenta y la suma de los máximos disminuye. Se puede demostrar que si $v(t)$ es continua, y una velocidad siempre lo es, existe un límite común para ambas sumas

$$\Delta s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v'_k \Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v''_k \Delta t \; .$$

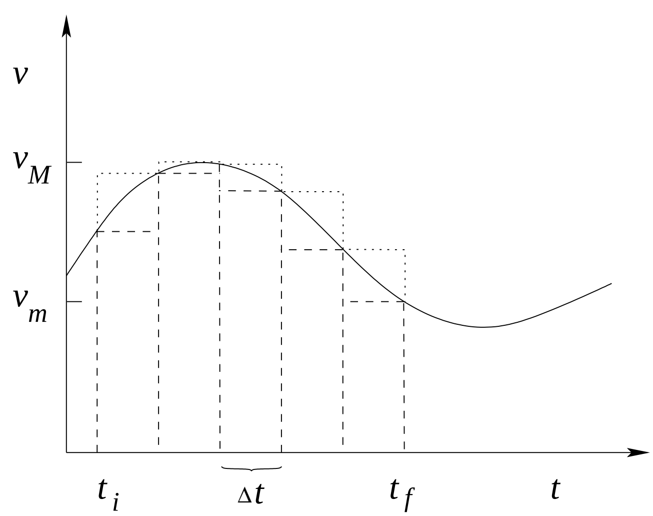

Fig. 3.6. Lapso dividido en 5 intervalos

Nótese que en el gráfico v *vs.* t (ver figura 3.6) los productos $v'_k \Delta t$ son las áreas de los rectángulos que están bajo la curva y los productos $v''_k \Delta t$ son las áreas de los rectángulos que estan por arriba de la curva. Por lo tanto si el límite común existe debe ser igual al área que hay entre el eje t y la curva $v(t)$.

En matemática el límite común de las dos sumas es la integral definida en el intervalo,

$$\int_{t_i}^{t_f} v(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v'_k \Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v''_k \Delta t \ .$$

El significado original del símbolo de integral $\int$ era una "S" de suma distorsionada. Intuitivamente lo que nos dice el símbolo es: Sume las áreas de los rectángulos de ancho infinitesimal dt y altura $v(t)$, para los tiempos comprendidos entre t_i y t_f.

Propiedades de las integrales

Sigue un compendio de propiedades de las integrales.

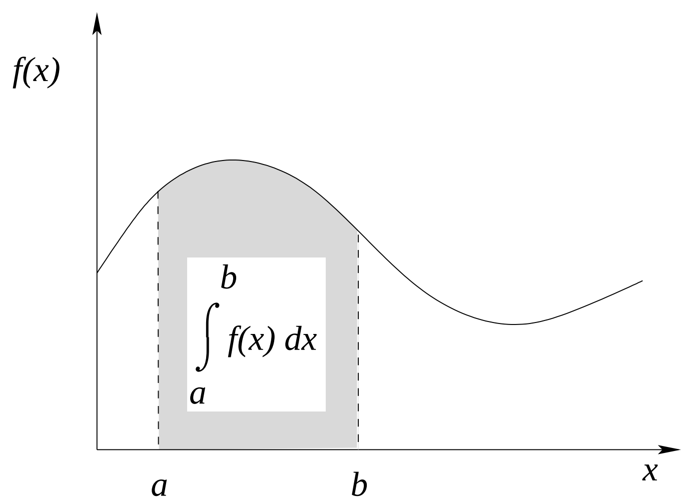

Fig. 3.7. Integral definida en el intervalo $[a, b]$

Propiedades de las integrales definidas.

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx \ .$$

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx \ .$$

Teorema fundamental del cálculo integral. *Sea una función $f(x)$. Definamos la función $F(x)$ como*

$$F(x) = \int_a^x f(u)\, du + F(a)$$

entonces

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \ .$$

Cambio de variable $x = g(u)$**.** $a = g(v)$ y $b = g(w)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_v^w f[g(u)]\frac{dg}{du}du$$

Primitivas.

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \quad \text{y} \quad \frac{dG}{dx} = f(x) \iff F(x) - G(x) = constante\ .$$

Integrales indefinidas.

$$F(x) = \int f(x)\,dx \iff \frac{dF}{dx} = f(x)\ .$$

Propiedades de las integraleds indefinidas

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx\ .$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \qquad \text{para } \alpha \neq -1$$

$$\int e^x\,dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln(x)$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}(x)$$

Vectores velocidad y aceleración

Para el movimiento en dos y tres dimensiones se puede definir el vector velocidad como

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}(\overrightarrow{OP}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OP}(t)) \\ &= \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}\ .\end{aligned}$$

Las proyecciones dr P sobre los ejes, P_x, P_y y P_z se mueven con movimiento rectilíneo con velocidades escalares $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dz}{dt}$ respectivamente. Análogamente la aceleración vectorial es

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}\ .$$

Las componentes de $\vec{a}$ son las aceleraciones escalares de los movimientos de las proyecciones.

Movimiento uniformemente acelerado

Consideremos un movimiento con una aceleración constante

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_0$$

Integrando

$$d\vec{v} = \vec{a}_0\, dt$$

$$\int_0^t d\vec{v} = \vec{a}_0 \int_0^t dt$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(0) = t\vec{a}_0$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + t\vec{a}_0\ .$$

Integrando nuevamente obtenemos la posición

$$\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \vec{v}(0) + t\vec{a}_0$$

$$\int d\overrightarrow{OP} = \int_0^t [\vec{v}(0) + t\vec{a}_0] dt$$

$$\overrightarrow{OP}(t) = \overrightarrow{OP}(0) + t\vec{v}(0) + \frac{1}{2}t^2\vec{a}_0$$

La trayectoria es una parábola que se encuentra en un plano paralelo a la aceleración $\vec{a}_0$ y a la velocidad inicial $\vec{v}(0)$. En el caso de que $\vec{a}_0 = 0$, el movimiento es rectilíneo uniforme

$$\overrightarrow{OP}(t) = \overrightarrow{OP}(0) + t\vec{v}(0)\ .$$

Para ver mejor que la trayectoria es parabólica podemos poner

$$\vec{a}_0 = a_0\hat{\jmath}\ , \qquad \text{y} \qquad \vec{v}(0) = v_{0x}\hat{\imath} + v_{0y}\hat{\jmath}\ ,$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t \\ y(t) = y_0 + tv_{0y} + \frac{1}{2}t^2 a_0 \end{cases}$$

En la dirección x, perpendicular a la aceleración, el movimiento es uniforme. En la dirección y, paralela a la aceleración, el movimiento es uniformemente acelerado.

Propiedades locales de la trayectoria

La ley horaria describe la manera como el móvil recorre la trayectoria. La velocidad escalar y la aceleración escalar dan información de ese movimiento en un instante. Los vectores velocidad y aceleración, contienen, además de esa información, información sobre el comportamiento de la trayectoria en el punto. Para estudiar la propiedades de la trayectoria es conveniente usar las ecuaciones paramétricas de la trayectoria en las que el parámetro es la coordenada curvilínea, $\overrightarrow{OP}(s)$.

Una primera propiedad es la dirección de la trayectoria. La dirección de una curva en un punto se define como la dirección de la recta tangente a la curva. La recta tangente es la recta que mejor aproxima la curva en el punto, vease la figura 3.8.

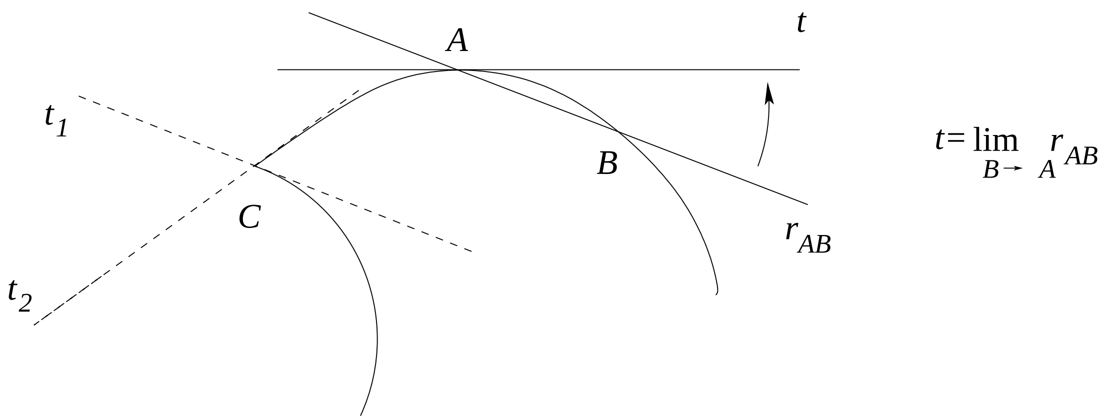

Fig. 3.8. Rectas tangentes a una curva

A es un punto regular que tiene una tangente t que es el límite de la secante r_{AB} cuando $B \to A$. El punto C es una cúspide que tiene dos tangentes t_1 y t_2.

Consideremos el vector $\vec{\tau}$ que se obtiene derivando el vector posición con respecto a la coordenada curvilínea s

$$\vec{\tau} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overrightarrow{OP}(s + \Delta s) - \overrightarrow{OP}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overrightarrow{P(s)\,P}(s + \Delta s)}{\Delta s}.$$

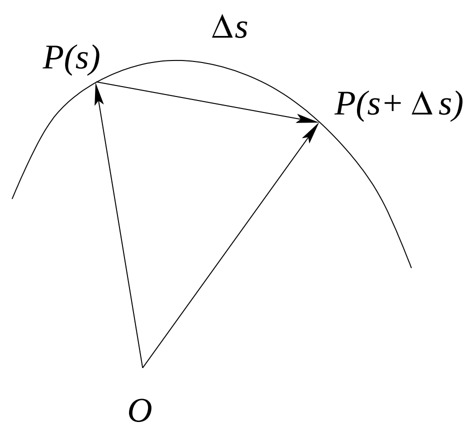

Fig. 3.9. Versor tangente

Por la definición de tangente, la recta que pasa por los puntos $P(s)$ y $P(s + \Delta s)$ tiende a la recta tangente en el límite $\Delta s \to 0$. Por lo tanto el vector $\vec{\tau}$ tiene la dirección de la tangente. Por otra parte la longitud de la cuerda $P(s)P(s+\Delta s)$ y la del arco Δs tienden a ser iguales en el límite $\Delta s \to 0$,

$$\lim_{\Delta s \to 0^+} \frac{|\overrightarrow{P(s)\,P}(s+\Delta s)|}{\Delta s} = 1\ .$$

En resumen el vector $\vec{\tau}$ es unitario, tangente a la curva y apunta en el sentido en el que crece la coordena s.

Además de la dirección otra propiedad que tiene la trayectoria en un punto es la **curvatura**. La curvatura se mide como el inverso del radio de la circunferencia que más se aproxima a la curva en un punto. Esta circunferencia se llama circunferencia **osculatriz** (del latín *osculum*, beso). En la figura 3.10 se explica como se define. El radio de la circunferencia osculatriz es el radio de curvatura y su centro el centro de curvatura. El plano que contiene al centro de curvatura y a la recta tangente es el plano osculador.

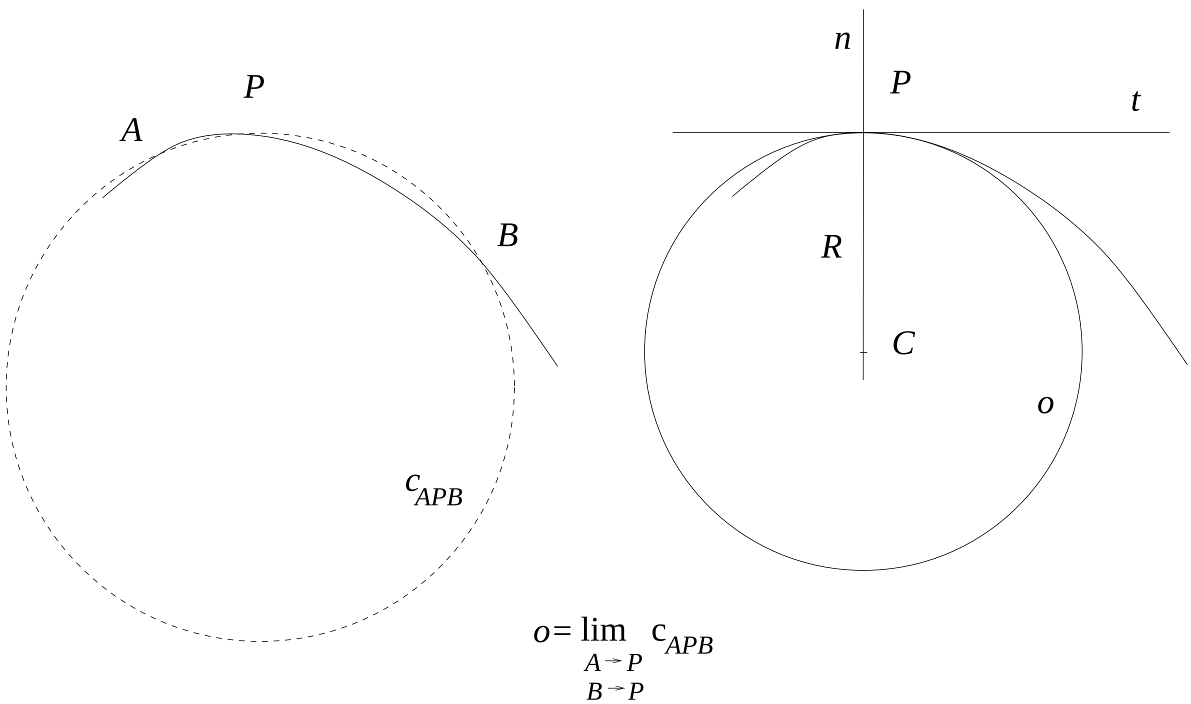

Fig. 3.10. Circunferencia osculatriz

Por el punto regular P de la curva y dos puntos adyacentes A y B pasa una sola circunferencia c_{APB}. La circunferencia osculatriz o es el límite de c_{APB} cuando $A \to P$ y $B \to P$. Esta circunferencia comparte la tangente t con la curva y su centro C está en una recta n perpendicular a la tangente t y se denomina **centro de curvatura**. Su radio R es el **radio de curvatura.**

La curvatura se calcula con la derivada del versor tangente $\vec{\tau}$ con respecto a la coordenada curvilínea s.

$$\frac{1}{R} = \left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{ds^2}\right|\ .$$

Como el vector $\vec{\tau}$ es unitario su derivada es ortogonal él

$$\vec{\tau}\cdot\vec{\tau} = 1 \Longrightarrow \vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0\ ,$$

entonces

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\hat{n} \ , \qquad \hat{n}\cdot\vec{\tau} = 0 \ .$$

El versor normal $\hat{n}$ apunta hacia el centro de curvatura C

$$\overrightarrow{PC} = R\hat{n} \ .$$

Curvatura de una circunferencia

Como ejemplo demostraremos que efectivamente la curvatura de una circunferencia es el inverso de su radio. Escribamos las ecuaciones en coordenadas polares de circunferencia del plano xy centrada en el origen y de radio R,

$$\overrightarrow{OP} = R(\cos(\theta)\hat{\imath} + \sin(\theta)\hat{\jmath}) \ .$$

El arco es igual a $s = R\theta$. El vector $\hat{\tau}$ es

$$\hat{\tau} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{ds} = \frac{1}{R}\frac{d\overrightarrow{OP}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos(\theta)\hat{\imath} + \sin(\theta)\hat{\jmath}) = -\sin(\theta)\hat{\imath} + \cos(\theta)\hat{\jmath} \ .$$

La derivada de $\hat{\tau}$ es

$$\frac{d\hat{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\frac{d\hat{\tau}}{d\theta} = \frac{1}{R}\frac{d}{d\theta}(-\sin(\theta)\hat{\imath} + \cos(\theta)\hat{\jmath}) = -\frac{1}{R}(\cos(\theta)\hat{\imath} + \sin(\theta)\hat{\jmath}) \ .$$

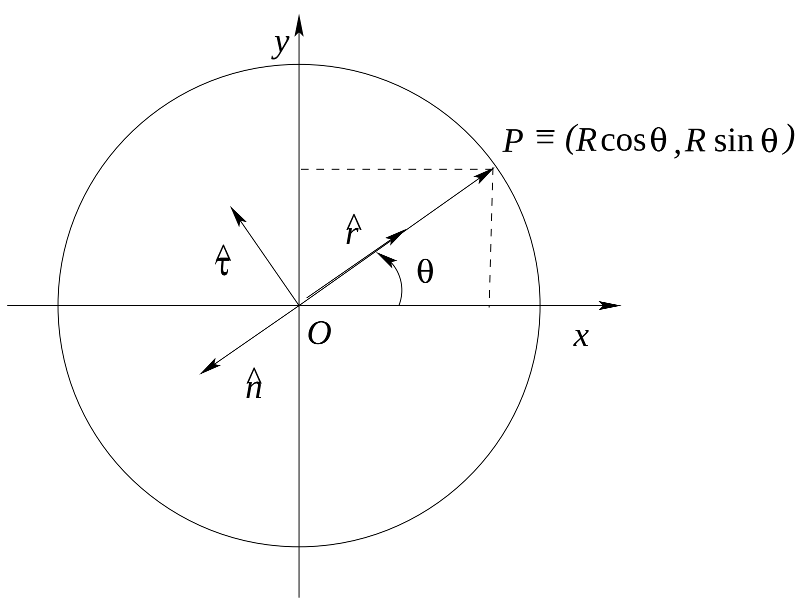

Fig. 3.11. Circunferencia en coordenadas polares

Relación entre el vector velocidad y la velocidad escalar

El vector velocidad es

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\overrightarrow{OP}}{ds} = \frac{ds}{dt}\hat{\tau} \ .$$

El vector velocidad es tangente, y su componente en la dirección $\hat{\tau}$ es precisamente la velocidad escalar, su módulo es la rapidez

$$|\vec{v}| = \left|\frac{ds}{dt}\right| \ .$$

Componentes de la aceleración

La aceleración vectorial es

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\frac{ds}{dt}\hat{\tau} = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{\tau} + \frac{ds}{dt}\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{\tau} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d\hat{\tau}}{ds} = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{\tau} + \frac{v^2}{R}\hat{n} \ .$$

La aceleración es la suma de dos vectores ortogonales entre sí

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \ ,$$

la aceleración tangencial

$$\vec{a}_t = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{\tau} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\hat{v}$$

y la normal o centrípeta

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\hat{n} \ .$$

La aceleración tangencial está relacionada con los cambios de rapidez

$$\vec{a}\cdot\hat{v} = \vec{a}_t\cdot\hat{v} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \ .$$

En un movimiento uniforme $\vec{a}_t$ es cero. Si el ángulo entre la velocidad y la aceleración es obtuso el movimiento es retardado. Si es agudo es acelerado.

Por su parte la aceleración normal está relacionada con cambios de dirección de la velocidad. En un movimiento rectilíneo $\vec{a}_n = 0$.

Cambios de marco de referencia

El movimiento de un móvil depende del marco de referencia. En esta sección estudiaremos la relación que hay entre los movimientos de un mismo móvil vistos desde dos marcos de referencia diferentes. Uno de ellos R lo consideraremos fijo. Solidario con él habra un sistema de coordenadas determinado por un origen O y una terna ortonormal $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$. El otro marco R' se moverá con respecto al primero. El marco R' también tendrá su sistema de coordenadas cartesianas con origen O' y terna ortonormal $\hat{\imath}'$, $\hat{\jmath}'$, $\hat{k}'$. En general, vistos desde R, tanto el origen O' como la terna $\hat{\imath}'$, $\hat{\jmath}'$, $\hat{k}'$ son funciones del tiempo. El movimiento de O' se llama la translación y el movimiento de la terna la rotación. Por ahora nos limitaremos a estudiar cambios de marco de referencia sin rotación relativa, (translación pura). Podremos en este caso identificar la terna de versores unitarios de R' con la de R.

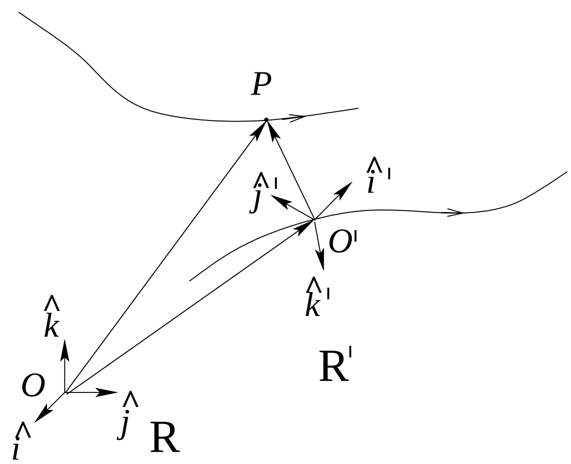

Fig. 3.12. Un móvil visto desde dos marcos de referencia

La posición del móvil P respecto al sistema R es el vector $\overrightarrow{OP}$ mientras que respecto al sistema R' es el vector $\overrightarrow{O'P}$. Por la definición de suma de vectores

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \ .$$

Derivando se obtiene la relación entre las velocidades

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}\,'$$

y derivando una vez más se obtiene la aceleración,

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}\,' \ .$$

Los vectores $\vec{v}\,'$ y $\vec{a}\,'$ son respectivamente la velocidad y aceleración relativas al marco R', mientras que $\vec{v}_{O'}$ y $\vec{a}_{O'}$ son la velocidad y aceleración del punto O' relativas al sistema de referencia R.

Si el movimiento de R' es de translación rectilínea uniforme la aceleración del móvil es igual en ambos marcos de referencia.

Movimiento circular

En un movimiento circular la coordenada curvilínea es proporcional al ángulo θ que forma el rayo que va del centro de la circunferencia al móvil y el radio que corresponde al origen de las coordenadas curvilíneas. Midiendo el ángulo en radianes y siendo R el radio,

$$s = R\theta \ .$$

El movimiento queda determinado cunado se conozca la función $\theta(t)$. Se definen la velocidad angular ω y la aceleración angular α como

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}v \ , \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R}a \ .$$

Cuando el movimiento es uniforme ($\alpha = 0$) el tiempo que tarda en dar una vuelta (período) es $T = 2\pi/\omega$.

Para un movimiento en el plano xy centrado en el origen se usan coordenadas polares como se ve en la figura 3.11. Conviene definir el versor radial

$$\hat{r} = \cos(\theta)\hat{\imath} + \sin(\theta)\hat{\jmath}.$$

El versor transversal $\hat{\theta}$, que tiene la dirección en la que θ crece, es la derivada de $\hat{r}$ respecto al ángulo,

$$\hat{\theta} = \frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\sin(\theta)\hat{\imath} + \cos(\theta)\hat{\jmath} \ .$$

La derivada de $\hat{\theta}$ es $-\hat{r}$,

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r} \ .$$

El vector posición es

$$\overrightarrow{OP} = R\hat{r} \ ,$$

la velocidad

$$\vec{v} = \omega R\hat{\theta}$$

y la aceleración

$$\vec{a} = \alpha R\hat{\theta} - \omega^2 R\hat{r} \ .$$

En el caso del movimiento uniforme ($\alpha = 0$), la aceleración es radial, y las proyecciones sobre los ejes tiene movimientos oscilatorios armónicos, con la misma amplitud (R) y la misma frecuencia angular (ω), pero desfasados $\pi/2$.

Un ejemplo 3D: movimiento helicoidal

Como ejemplo de movimiento en tres dimensiones consideraremos el movimiento helicoidal. Este movimiento está compuesto por un movimiento circular uniforme en el plano xy y una translación con velocidad constante u en el eje z. La trayectoria es una hélice. El paso de la hélice es lo que avanza a lo largo del eje z en una vuelta $2\pi u/\omega$. En un marco de referencia que se mueva con velocidad de translación $u\hat{k}$ el movimiento es circular uniforme.

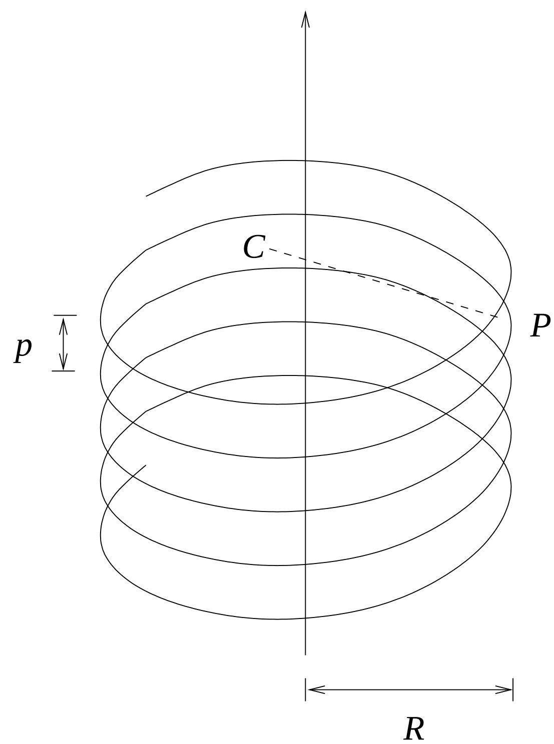

Fig. 3.13. Hélice

Hélice de radio R y paso p. El radio de curvatura es mayor que R, por eso el centro de curvatura C del punto P no se encuentra en el eje.

Si hacemos coincidir el eje de la hélice con el eje z y si la posición inicial es el punto $(R, 0, 0)$ las ecuaciones que describen el movimiento son

$$\overrightarrow{OP} = R(\cos(\omega t)\hat{\imath} + \sin(\omega t)\hat{\jmath}) + ut\hat{k} \ .$$

La velocidad es

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = R\omega(-\sin(\omega t)\hat{\imath} + \cos(\omega t)\hat{\jmath}) + u\hat{k} \ ,$$

y la aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2(\cos(\omega t)\hat{\imath} + \sin(\omega t)\hat{\jmath}) \ .$$

La aceleración es la misma que la del movimiento circular uniforme.

La rapidez es constante $v = \sqrt{\omega^2 R^2 + u^2}$, pero el versor tangente tiene conponente z

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 R^2 + u^2}}[R\omega(-\sin(\omega t)\hat{\imath} + \cos(\omega t)\hat{\jmath}) + u\hat{k}] \ .$$

La aceleración es puramente normal, pero el radio de curvatuta R_c es mayor que el radio R,

$$|\vec{a}| = R\omega^2 = v^2/R_c$$

$$R_c = \frac{v^2}{R\omega^2} = \frac{\omega^2 R^2 + u^2}{R\omega^2} = R\Big[1 + \big(\frac{u}{R\omega}\big)^2\Big] \ .$$

El centro de curvatura no se encuentra en el eje y el plano osculador está inclinado.

Un ejemplo 2D: La cicloide

La cicloide es la curva que recorre un punto del borde de una rueda que ruede sin patinar sobre una superficie plana. Consideremos el caso de la rueda de radio R que se traslada con velocidad constante v_0. Vease la figura 3.14. La posición del centro de la rueda es

$$\overrightarrow{OC} = v_0 t \hat{\imath} + R\hat{\jmath} \ .$$

El vector $\overrightarrow{CP}$ rota con velocidad angular ω. El ángulo es $\theta = \omega t$. Entonces

$$\overrightarrow{CP} = -R\sin(\omega t)\hat{\imath} - R\cos(\omega t)\hat{\jmath} \ .$$

El movimiento es entonces

$$\overrightarrow{OP} = (v_0 t - R\sin(\omega t))\hat{\imath} + R(1 - \cos(\omega t))\hat{\jmath} \ .$$

La velocidad es

$$\vec{v} = (v_0 - R\omega\cos(\omega t))\hat{\imath} + R\omega\sin(\omega t)\hat{\jmath} \ .$$

No hemos usado para nada la condición de que la rueda no patine. Esa condición lo que dice es que cuando el punto está en contacto con la supeficie ($t = 0$) la velocidad debe anularse, entonces

$$v_0 = R\omega \ .$$

Nótese que la trayectoria es singular en los puntos en los que el móvil está en contacto con la superficie; hay una cúspide. Sin embargo como la velocidad se anula el movimiento es regular.

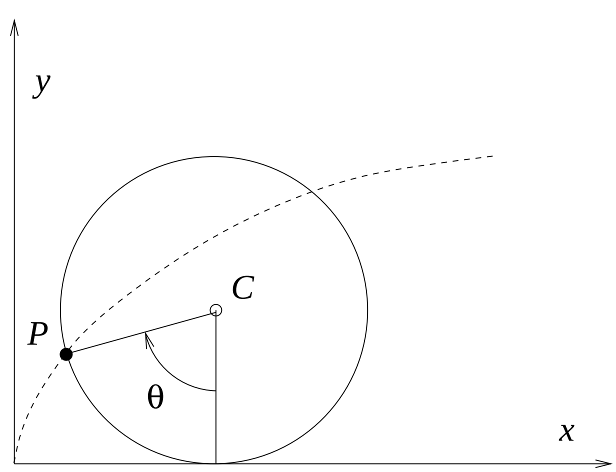

Fig. 3.14. Cicloide

También en este caso la aceleración es igual a la del movimiento circular uniforme

$$\vec{a} = R\omega^2(\sin(\omega t)\hat{\imath} + \cos(\omega t)\hat{\jmath}) \; .$$

Sin embargo, a diferencia del movimiento circular uniforme, para la cicloide sí hay una componente tangencial de la aceleración. En efecto la rapidez varía de 0 en el punto de contacto con el piso a $2\omega R$ en el tope de la curva.

Calculemos el radio de curvatura en el tope $\omega t = \pi$. En el tope la aceleración es puramente centrípeta, por tanto

$$R_c = \frac{v^2}{|\vec{a}_n|} = \frac{(2R\omega)^2}{R\omega^2} = 4R \; .$$

Unidad 4

Dinámica

El principio de inercia de Galileo Galilei

La Dinámica es la parte de la Mecánica que estudia las causas del movimiento y los movimentos que resultan en determinadas situaciones. Se supone que esas causas sean acciones o fuerzas que los cuerpos ejercen unos sobre otros. El nombre proviene del griego $\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\varsigma$, fuerza. La Dinámica es la parte de la Física más antigua, en particular la Estática, que es el estudio de los cuerpos en equilibrio, es más o menos la misma que la de la antigüedad.

El primer principio o ley de la dinámica es el Principio de Inercia debido a Galileo Galilei (Pisa 1564 – Florencia 1642). Galileo fue el primer físico de la época moderna y uno de los creadores de la ciencia experimental. Su principio de inercia es totalmente contrario a la creencia tradicional. En nuestra experiencia diaria los cuerpos tienden a pararse. Por eso parece natural la conclusión a la que llegó Aristóteles (384–322 a.C.) en su tratado sobre Física, de que el "estado natural" de todos los cuerpos es el reposo y que un cuerpo cualquiera en movimiento disminuye su velocidad hasta parase a menos que algo lo empuje para que siga moviendose. Debieron pasar unos 2000 años para que Galileo se diera cuenta de que el "estado natural" de los cuerpos no era el reposo. Galileo hizo multitud de observaciones y estudios del movimiento de cuerpos en planos inclinados y superficies horizontales, y se dió cuenta de que lo que frenaba el movimiento de los cuerpos eran la fuerzas de roce de las superficies y del aire. En el *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo* (1632) escribe que en ausencia de cualquier impedimento externo o accidental un móvil que se deslice sobre una superficie horizontal se movería con movimiento rectilíneo uniforme hasta el borde de la superficie, y que si tal espacio fuese sin término el movimiento sería perpetuo. Dice también que para que esto sea cierto el móvil debe ser inmune a cualquier resistencia, lo cual es quizás imposible de encontrar en la materia, por lo que no sería de extrañar que este resultado sea contrario a la experiencia.

El polifacético físico y matemático inglés Isaac Newton (1643–1727) publicó en 1687 uno de los libros más influyentes de la historia, *Principios matemáticos de la Filosofía Natural*. En esta obra Newton expuso sus tres leyes (o axiomas) que constituyen la teoría de la Dinámica que estuvo vigente por más de 200 años. La primera ley es una generalización del principio de Galileo. Aparecen también la teoría de la Gravitación Universal, la demostración de las leyes de Kepler del movimiento planetario y como un apendice el cálculo diferencial con el nombre de teoría de las fluxiones.

Sistemas de referencia inerciales y 1ª ley de Newton

En el principio de inercia de Galileo está implícito que el sistema de referencia es la Tierra. Vamos a tratar de extender este principio a otros sistemas de referencia.

En la época de Galileo no estaba para nada claro el concepto de sistema de referencia y la relatividad del espacio. Desde siempre se había considerado la Tierra en reposo y el espacio era el espacio solidario con ella. Los dos máximos sistemas a los que se refiere en su *Dialogo* son los dos modelos que estaban en voga para la astronomía, el geocéntrico con la Tierra en reposo en el centro del Universo, y el heliocéntrico con el sol en el centro del sistema solar. La astronomía antigua, cuyo último gran exponente fue el egipcio de época romana Claudio Tolomeo (90-170 d.C.) usaba el sistema geocéntrico. El sistema heliocéntrico fue propuesto un siglo antes de Galileo por el cura polaco Nicolás Copérnico (1473–1543). En la época de Galileo había un gran debate sobre cual era el sistema correcto. La Iglesia Católica condenó el sistema heliocéntrico como contrario a la Biblia. A Galileo se le siguió un juicio por apoyarlo y fue obligado a retractarse. Lo más paradójico del asunto, visto desde la perspectiva de hoy en día, es que con respecto a la cinemática ambos sistemas *son equivalentes*, son simplemente sistemas de referencia diferentes. El sistema heliocéntrico puede ser más conveniente que el geocéntrico, pero seguramente no es más *verdadero*.

El juicio a Galileo y la condena unos años antes del filósofo Giordano Bruno a morir en la hoguera, por sostener, entre otras cosas, que las estrellas eran como soles y que seguramente tendrían planetas como la Tierra, tuvieron un efecto trascendental en la historia: la ciencia huyó de los paises católicos hacia regiones menos hostiles.

Lo primero que hay que decir sobre el pricipio de inercia es que se refiere a cuerpos sobre los que no actúan fuerzas externas. A estos cuerpos los llamaremos **libres**. Los segundo es que el principio no puede valer para cualquier sistema de referencia. Un movimiento rectilíneo uniforme en un sistema de referencia se puede ver como una cosa muy distinta en otro sistema. Vamos entonces a definir como inerciales los sistemas de referencia en los que vale el principio de inercia.

Definición. *Se denominan* **inerciales** *los sistemas de referencia en los que los cuerpos libres se mueven con movimiento rectilíneo uniforme.*

Habiendo hecho esta definición podemos demostrar el siguiente teorema

Teorema. *Dado un sistema de refencia inercial R, condición necesaria y suficiente para que otro sistema de referencia R' sea también inercial es que se mueva con movimiento de translación rectilínea uniforme con respecto al primero.*

Demostración. Si un sistema de referencia R' rota respecto de R las trayectorias rectas en R son curvas en R'. Por lo tanto el movimiento de R' respecto a R debe ser de translación. Las aceleraciones de un móvil en ambos sistemas están relacionadas por

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}' \ .$$

Si la aceleración de la translación $\vec{a}_{O'}$ es cero todos las móviles tienen la misma aceleración en ambos sistemas. Por otra parte si un mismo móvil se mueve con aceleración cero en ambos sistemas debe necesariamente ser $\vec{a}_{O'} = 0$.

Naturalmente una definición no dice nada sobre la naturaleza, simplemente especifica un término. Entonces ¿Cuál sería la ley de la inercia?, simplemente la hipótesis de que los sistemas de referencia inerciales existan.

1ª ley de Newton. *Existen sistemas de referencia inerciales.*

Supongamos que existan los sistemas de referencia inerciales (SRI), el problema entonces es: ¿Cuales son?

La Tierra es un buen SRI para fenómenos terrestres que duren pocos segundos y no tengan una gran extensión espacial, como por ejemplo los experimentos de Galileo. Pero si los fenómenos duran varias horas, la situación es diferente. Lo primero que nos damos cuenta es que los cuerpos celeste dan vueltas alrededor de la Tierra. La gran mayoría con la misma velocidad angular constante, son las llamadas estrellas fijas. Algunos pocos, el Sol, la Luna, los planetas, los cometas, en general los cuerpos del sistema solar, tienen movimientos adicionales al de las estrellas fijas. Si suponemos que la Tierra sea un SRI tendríamos que explicar cuál es la acción que ejerce la Tierra sobre las estrellas fijas que las obliga a rotar en torno a ella con movimiento circular uniforme. La acción debería crecer con el radio (distancia Tierra-estrella), dado que la aceleración centrípeta es $\omega^2 r$. Habría que explicar además porqué el eje de rotación es el mismo para todas las estrellas fijas y como es posible que tales estrellas tengan velocidades tan inmensas como las que resultan del producto ωr.

Si en cambio suponemos que sea la Tierra la que rota respecto a un SRI, una vuelta cada día sideral, alrededor del eje Norte-Sur y en sentido Oeste-Este, las estrellas fijas se verían realmente como en direcciones fijas. En realidad cada estrella podrá tener su propio movimiento, rectilíneo o no, con una velocidad transversal v_t. La velocidad angular de la estrella vista desde la desde la Tierra será

$$\omega = \frac{v_t}{r} \ .$$

Las distancias de la Tierra a la mayoría de las estrellas es tan grande que la velocidad angular que resulta es imperceptible, aún suponiento la máxima velocidad posible $v_t = c$.

Podemos verificar la rotación de la tierra con respecto a un SRI con el péndulo de Foucault, un péndulo pesado y largo que pueda oscilar durante horas sin pararse. Las leyes de la mecánica en un SRI determinan que el péndulo oscila en un plano. Si ponemos el péndulo en uno de los polos se observa que el plano del péndulo se mantiene inmóvil respecto a las estrellas fijas, o sea que rota una vuelta por día sideral en el sentido Este-Oeste.

En conclusión, los sistemas de referencia inerciales no rotan respecto a las estrellas fijas.

Un sistema de referencia origen en el centro de la Tierra y que no rote respecto a las estrellas fijas permite estudiar fenómenos terrestres que duren dias, incluyendo satélites artificiales etc. Desde el punto de vista de la cinemática ambos sistemas son equivalentes, desde el punto de la dinámica no lo son.

Si queremos estudiar el movimiento de la Luna ese marco de referencia no es adecuado. Deberíamos usar uno con origen en el centro de masas del sistema Tierra-Luna.

Si nuestro objetivo es estudiar el movimiento de las cuerpos del sistema solar ese tampoco es un buen SRI. Uno adecuado es el centrado en el centro de masas del sistema solar, punto que es bastante cercano al centro del Sol. Con este marco de referencia podemos estudiar fenómenos que duren miles de años.

La mayor parte de las estrellas que vemos forman parte de nuestra galaxia, La Via Lactea. A una escala de millones de años esas estrellas no aparecen en absoluto como *fijas*. Tendremos que usar galaxias lejanas para definir la dirección de los ejes.

Si nuestro objetivo es por ejemplo estudiar el movimiento de las estrellas en la Galaxia un sistema de referencia con origen en el centro de la Galaxia sería el adecuado. Con ese sistema podemos estudiar fenómenos que duren centenares de millones de años.

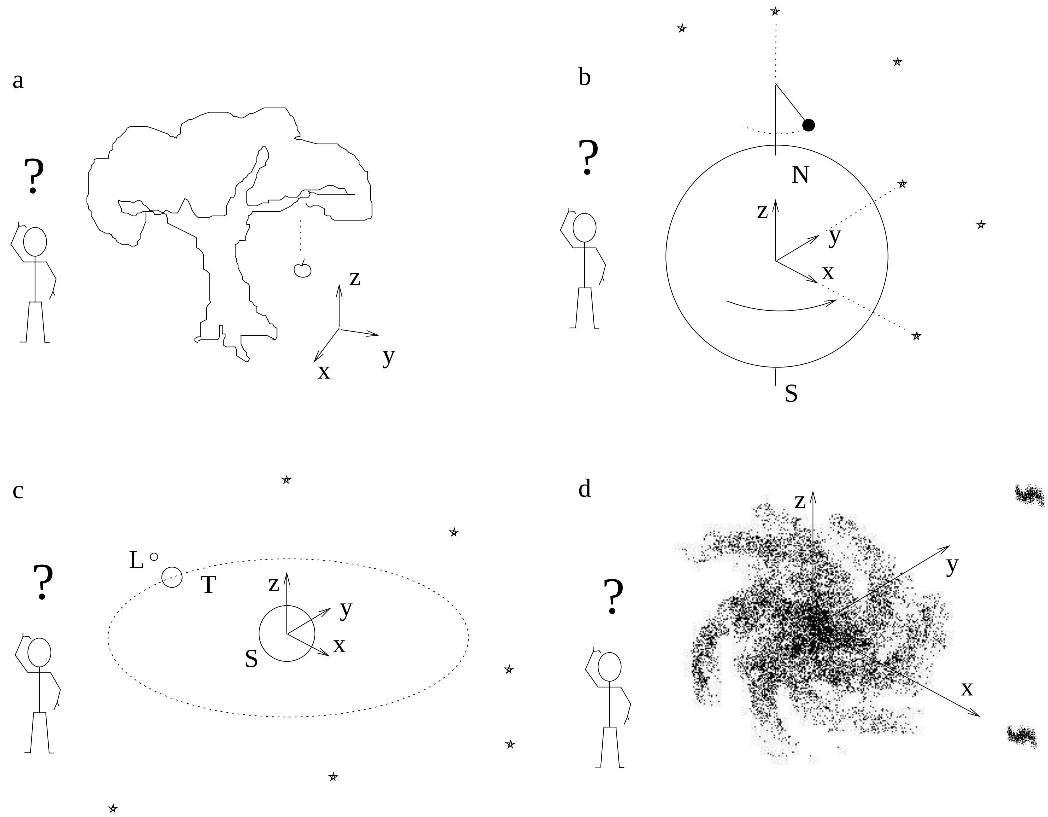

Fig. 4.1. Marcos inerciales.

Lo adecuado que sea un sistema de referencia como inercial depende del fenómeno que estemos estudiando. a) Para estudiar una fruta que cae durante unos pocos segundos basta un sistema solidario con el suelo. b) Para tratar un péndulo de Foucault que dura varias horas oscilando, la rotación de la tierra es relevante. Se puede usar un sistema con origen en el centro de la Tierra y ejes dirigidos hacia estrellas fijas. c) Para estudiar el movimiento de los planetas, durante meses o años usamos un sistema centrado en el Sol. d) Para estudiar el movimiento de las estrellas en la Galaxia, durante centenares de millones de años podemos usar un sistema centrado en el centro de la Galaxia y con ejes dirigidos hacia galaxias lejanas.

Fuerza, peso, dinamómetro

Las fuerzas son las acciones que los cuerpos ejercen unos sobre otros y que causan las aceleraciones. La fuerza como magnitud física era ya usada en la antiguedad. Si un cuerpo es libre, o sea si sobre él no hay fuerzas, sabemos por el principio de inercia, que está en reposo o tiene aceleración cero. Pero la aserción recíproca es falsa. Sobre un cuerpo con aceleración cero pudieran estar actuando varias fuerzas cuyos efectos se anulen. Diremos en ese caso que la fuerza neta es cero.

La primera fuerza que todos experimentamos es el peso. Todos los cuerpos son atraidos hacia el centro de la Tierra. Para evitar que algo caiga hay que sostenerlo con alguna otra fuerza, por ejemplo colgándolo con una cuerda. Podemos usar el hecho de que la fuerza neta sobre un cuerpo en reposo debe ser cero para comparar fuerzas. Por ejemplo si en dos situaciones diferentes un mismo cuerpo se mantiene en reposo sin caer podemos decir que las fuerzas que ambos casos anulan el efecto del peso deben ser iguales.

Además de aceleraciones, las fuerzas que actúan sobre los cuerpos también producen *deformaciones*. Típicamente si las fuerzas no son muy grandes las deformaciones que producen son *reversibles*, es decir el cuerpo recupera su forma original al desaparer la fuerza. En este caso decimos que la deformación es *elástica*. Podemos usar las deformaciones elásticas para medir la fuerzas. Por ejemplo podemos calibrar las elongaciones de un resorte en unidades de fuerza. Un aparato para medir fuerzas, como por ejemplo el que acabamos de describir, se llama **dinamómetro**.

Si halamos un cuerpo con una cuerda notamos que el efecto depende de la dirección de la cuerda. Es decir las fuerzas tienen dirección. Si aplicamos dos fuerzas paralelas a un cuerpo el efecto es el mismo que la aplicación de una sola fuerza cuya magnitud sea la suma de las magnitudes de las fuerzas. Si aplicamos fuerzas con direcciones diferentes constatamos que las fuerzas se suman como *vectores*. Es decir la fuerza es una magnitud física vectorial

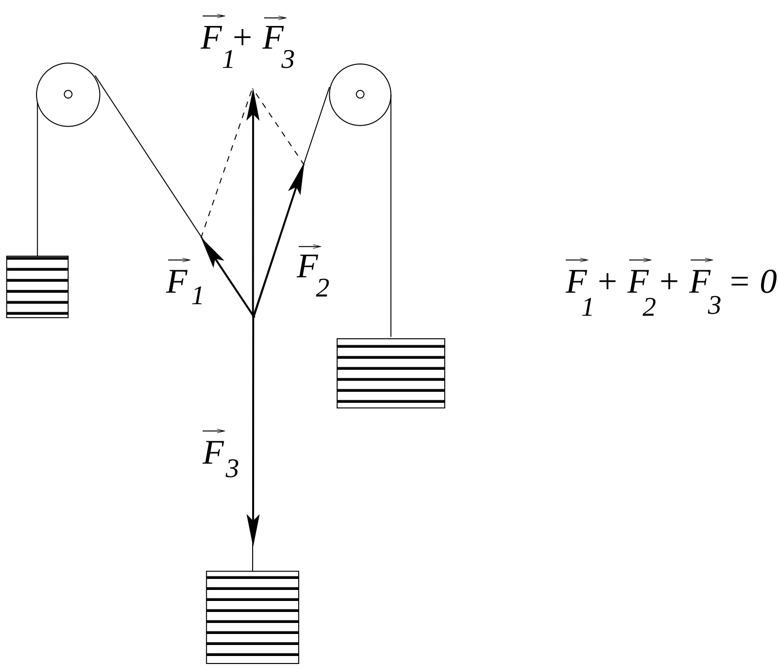

Fig. 4.2. Suma de fuerzas.

En equilibrio las fuerzas que ejercen las tres cuerdas en el punto en que se unen se anulan vectorialmente.

Masa inercial y 2ª ley de Newton

Según la primera ley de Newton en un sistema de referencia inercial los cuerpos sobre los que no actúan fuerzas se mueven sin aceleración. Por lo tanto las causas de las aceleraciones son las fuerzas. La segunda ley de Newton nos dice que relación hay entre la fuerza que actua sobre un cuerpo y la aceleración que adquiere. Supongamos que estamos en el espacio interplanetario, lejos de los planetas. La atracción gravitatoria de los planetas será insignificante y la del Sol tardará días es notarse. Podemos hacer experimentos aplicando fuerzas conocidas sobre diferentes cuerpos y midiendo las aceleraciones que adquieren.

El resultado de los experimentos puede resumirse en la segunda ley.

2ª ley de Newton. *Un cuerpo puntual sobre el que actúa una fuerza $\vec{F}$ adquiere una aceleración $\vec{a}$ con el mismo sentido y la misma direccíon que la fuerza y una magnitud proporcional a la magnitud de la fuerza,*

$$\vec{a} \propto \vec{F} \ .$$

La constante de proporcionalidad es una magnitud escalar positiva característica del cuerpo, cuyo inverso m se denomina **masa inercial**, o simplemente masa del cuerpo.

$$m\vec{a} = \vec{F} \ .$$

En la dinámica de la partícula aparecen, en relación con la cinemática, dos nuevas magnitudes físicas: la fuerza y la masa. Se escogió a la masa con magnitud fundamental. La unidad internacional de masa es el kilogramo (kg) y la unidad de fuerza es el Newton ($1\mathrm{N} = 1\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$).

La masa mide la inercia de un cuerpo, o sea su resistencia a cambiar su estado de movimiento, mayor es la masa menor es la aceleración que adquiere por efecto de una fuerza.

La aditividad de las fuerzas implica la aditividad de las masas. Consideremos dos cuerpos uno de masa m_1 sobre el que actúa una fuerza $\vec{F}_1$ y el otro de masa m_2 sobre el que actúa una fuerza $\vec{F}_2$. Supongamos que no hay fuerzas entre ellos y que ambos se mueven con la misma aceleración $\vec{a}$ y con una velocidad relativa nula del uno respecto al otro. Podríamos considerar que ambos cuerpos son dos partes de un mismo cuerpo compuesto.

$$m_1\vec{a} = \vec{F}_1 \quad \text{y} \quad m_2\vec{a} = \vec{F}_2 \implies (m_1 + m_2)\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \ .$$

La fuerza total que actúa sobre el cuerpo compuesto será $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ y por consiguiente la masa del cuerpo compuesto debe ser $m = m_1 + m_2$. Si un cuerpo es homogéneo su masa inercial es proporcional a la cantidad de materia.

Relatividad de Galileo

Las aceleraciones de los cuerpos son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales. Como los movimientos están determinados por la segunda ley de Newton que depende de la aceleración, todos los SRI son *equivalentes mecánicamente*. Esto fue descubierto por Galileo, quien en el *Dialogo* escribe que si un barco navega con velocidad constante en un lago de aguas tranquilas sería imposible, haciendo observaciones dentro del barco, descubrir si el barco se mueve o a que velocidad se mueve.

Fuerzas aparentes

En ocasiones puede ser conveniente usar sistemas de referencia que no sean inerciales. En ese caso la 2ªley de Newton no es válida. Si llamamos $\vec{a}'$ la aceleración de una partícula respecto al sistema de referencia acelerado R' y $\vec{a}$ la aceleración respecto a un SRI R en general tendremos

$$\vec{a} = \vec{a}_{R'} + \vec{a}'$$

donde la aceleración $\vec{a}_{R'}$ depende del movimiento del sistema acelerado. Si este último tiene un movimiento de pura translación entonces $\vec{a}_{R'} = \vec{a}_{O'}$, pero si el sistema tiene rotación la expresión es más complicada. La ecuación de movimiento de la partícula en el sistema acelerado toma la forma de la 2ªley de Newton si definimos la **fuerza aparente** como

$$\vec{F}_{\mathrm{a}} = -m\vec{a}_{R'}$$

y las sumamos a la fuerza verdadera $\vec{F} = m\vec{a}$,

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\mathrm{a}}\ .$$

Acción y reacción

Muchas fuerzas se presentan como interacciones entre cuerpos. La tercera ley de Newton establece ciertas condiciones sobre las fuerzas de interacción.

3ªley de Newton. *Si dos cuerpos puntuales A y B interactúan la fuerza $\vec{F}_{BA}$ que A produce sobre B y la fuerza $\vec{F}_{AB}$ que B produce sobre A cumplen las siguientes dos condiciones*

a) son vectores opuestos $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ (o sea tienen la misma dirección, la misma magnitud y sentido opuesto),

b) son paralelas a la línea recta que une A con B (línea de acción).

Es costumbre referirse a una de las fuerzas como *acción* y a la otra como *reacción.* Es de hacer notar que la acción y la reacción están aplicadas en cuerpos diferentes.

Por ejemplo si una pelota rebota sobre una pared la fuerza que la pelota ejerce sobre la pared es opuesta a la fuerza que la pared hace sobre la pelota. La fuerza con la que la Tierra atrae a la Luna es opuesta a la fuerza con la que la Luna atrae a la Tierra. Si guindamos un cuerpo con una cuerda, la fuerza con la que la cuerda hala al cuerpo es opuesta a la fuerza que el cuerpo hace sobre la cuerda. La fuerza de fricción que el aire hace sobre un paracaidas es opuesta a la fuerza que el paracaidas hace sobre la masa de aire.

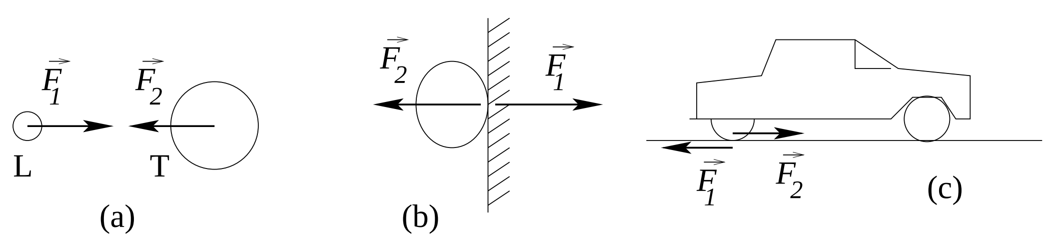

Fig. 4.3. Pares acción-reacción.

(a) $\vec{F}_1$ es la fuerza con la que la Tierra atrae a la Luna, $\vec{F}_2$ aquella con la que la Luna atrae a la Tierra. (b) En una pelota que rebota en una pared, $\vec{F}_1$ es la fuerza que hace la pelota sobre la pared y $\vec{F}_2$ la que la pared hace sobre la pelota. (c) En un automóvil $\vec{F}_1$ es la fuerza de fricción que la rueda hace sobre el pavimento y $\vec{F}_2$ es la que el pavimento hace sobre la rueda. Esta última es la fuerza que impulsa el automóvil.

Cantidad de movimiento e impulso

Se denomina **cantidad de movimiento**, **ímpetu** o **momentum lineal** de una partícula al producto de su masa por su velocidad,

$$\vec{p} = m\vec{v} \; .$$

Esta definición es debida a Newton.

Si $\vec{F}$ es la fuerza neta que actúa sobre la partícula, la segunda ley de Newton se escribe

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \; .$$

Si integramos la ecuación de movimiento entre dos instantes t_1 y t_2 obtenemos

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = \vec{I} \; .$$

La integral de la fuerza respecto al tiempo recibe el nombre de **impulso**. El incremento del ímpetu es igual al impulso de la fuerza neta.

El concepto de impulso es particularmente útil en el caso de las fuerzas impulsivas, que son fuerzas de muy corta duración, pero muy itensas, de manera que el ipulso es significativo. Son las fuerzas típicas de un choque. Podemos tener una partícula que esté sometida a una fuerza no impulsiva $\vec{F}$ y a una impulsiva $\vec{F}_i$. El impulso de la fuerza no impulsiva durante el lapso de duración de $\vec{F}_i$ será insignificante. El incremento de la cantidad de movimiento durante el choque será esencialmente el impulso de la fuerza impulsiva. Típicamente el desplazamiento durante el choque también es nulo.

Centro de masas de un sistema

La mayor utilidad de la cantidad de movimiento es para tratar sistemas de partículas. Un cuerpo cualquiera puede ser modelado como un conjunto de partículas. La partícula k-esima tendrá una posición $\vec{r}_k$, una masa m_k, y una cantidad de movimiento $\vec{p}_k = m_k \vec{v}_k$. La masa total del sistema será $M = \sum_k m_k$.

El centro de masas G es el punto geométrico cuyas coordenadas son el promedio, ponderado con la masa, de las posiciones de las partículas

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \sum_k m_k \vec{r}_k \ .$$

La velocidad del centro de masas es

$$\vec{v}_G = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_k m_k \vec{v}_k = \frac{1}{M} \sum_k \vec{p}_k .$$

Llamando $\vec{P}$ a la cantidad de movimiento total del sistema tenemos

$$\vec{P} = M \vec{v}_G \ .$$

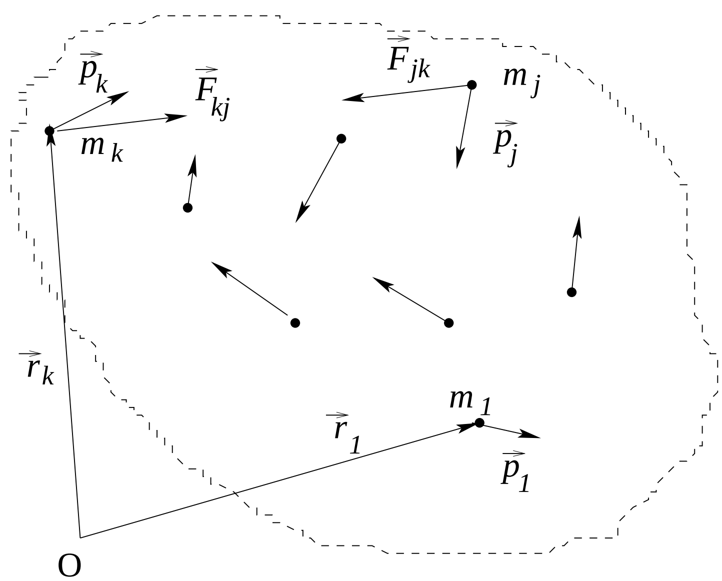

Fig. 4.4. Sistema de partículas.

Fuerzas internas

Consideremos ahora las fuerzas que actúan sobre el sistema. La fuerza total que actúa sobre la partícula k-esima tendrá una componente externa y una interna formada por la suma de las fuerzas que ejercen sobre ella las otras partículas del sistema.

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{kj} \ .$$

La fuerza neta que actúa sobre todo el sistema será la suma de las fuerzas sobre cada partícula $\vec{F}_k$,

$$\vec{F}_{\text{total}} = \sum_k \vec{F}_k^{(e)} + \sum_{kj} \vec{F}_{kj} \ .$$

Ahora bien, la ley de acción y reacción dice que la fuerza que la partícula j ejerce sobre la partícula k es opuesta a la fuerza que k ejerce sobre j, $\vec{F}_{kj} = -\vec{F}_{jk}$, y por consiguiente *la suma de la fuerzas internas es nula.*

$$\vec{F}_{\text{total}} = \sum_k \vec{F}_k^{(e)} = \vec{F}_{\text{total}}^{(e)} \ .$$

Este resultado es el que permite tratar un cuerpo compuesto como una partícula, sin ocuparnos de las fuerzas que una parte del cuerpo hace sobre las otras.

Dinámica de un sistema. Conservación de la cantidad de movimiento

Para la partícula k-esima de un sistema vale

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt} = \vec{F}_k \ ,$$

Sumando sobre todas las partículas del sistema

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_G = \vec{F}_{\text{total}}^{(e)} \ .$$

Si la fuerza externa neta sobre un sistema es nula en una dirección $\hat{u}$, $\vec{F}_{\text{total}}^{(e)} \cdot \hat{u} = 0$ durante cierto lapso la correspondiente componente de la cantidad de movimiento total se conserva durante el mismo lapso

$$\vec{P} \cdot \hat{u} = \text{constante} \ .$$

En particular si sobre un sistema no actúan fuerzas externas su centro de masas se moverá con movimiento rectilíneo uniforme.

Validez de las leyes de Newton

La mecánica Newtoniana o Clásica deja de ser válida en dos límites, para cuerpos muy pequeños (efectos cuánticos) y para cuerpos muy rápidos, $v \sim c$ (efectos relativistas). Nos limitaremos a considerar este último caso.

En la Relatividad Especial (1905) de Albert Einstein (Alemania 1879, EEUU 1955) la primera ley de Newton sigue siendo válida, excepto en dos aspectos. Primero, la velocidad relativa entre los sistemas de referencia inerciales debe ser menor que la velocidad de la luz. Segundo, la simultaneidad es relativa; eventos que son simultáneos en un sistema de referencia no lo son en otro. Esto hace que el tiempo sea diferente en dos sistemas de referencia diferentes. Por consiguiente también son diferentes las fórmulas del movimiento relativo. En vez de las llamadas transformaciones de Galileo se usan las transformaciones de Lorentz.

La segunda ley de Newton es válida en relatividad solamente si la velocidad es nula. Sin embargo es una buena aproximación para $v \ll c$.

Dado que, según la Relatividad Especial, las acciones instantáneas a distancia no pueden existir la ley acción y reacción entre partículas distantes no puede ser exacta. Por ejemplo las fuerzas entre dos cargas eléctricas en reposo separadas una distancia r cumplen con la tercera ley, pero si una de las cargas se mueve la otra se enterará un tiempo r/c después. Entre cargas en movimiento, además de la fuerza electrostática, existen fuerzas magnéticas, que violan totalmente la tercera ley. La imposibilidad de las acciones a distancia indica que alrededor de las cargas eléctricas debe existir algún ente físico que transporta la fuerza. Ese ente es el campo electromagnético, que tiene cantidad de movimiento. Cuando no haya fuerzas externas la cantidad de movimiento total de las partículas y del campo electromagnético se conserva. En ese sentido la tercera ley sigue siendo válida.

Las fuerzas magnéticas dependen de la velocidad, y por lo tanto, aparentemente violan también la relatividad, o sea no serían iguales en diferentes marcos de referencia inerciales. Fue precisamente ese problema el que llevó a Einstein a desarrollar la teoría de Relatividad Especial. Impuso que la relatividad fuera válida para el electromagnetismo, pero a costa de introducir el tiempo relativo y cambiar la segunda ley de Newton.

Fuerza de gravedad

El peso total de un cuerpo es la suma de los pesos de sus partes. Si el cuerpo es homogéneo el peso es proporcional a la cantidad de materia del cuerpo. Podemos usar el peso de un cuerpo patrón para definir la **masa gravitatoria** del cuerpo. Si m_p es la masa del patrón y $\vec{W}_\mathrm{p}$ su peso, el peso $\vec{W}$ de un cuerpo de masa gravitatoria m_g será

$$\vec{W} = m_\mathrm{g}\frac{\vec{W}_\mathrm{p}}{m_\mathrm{p}} = m_\mathrm{g}\vec{g}\ .$$

El vector $\vec{g}$ es el campo gravitacional.

Consideremos un cuerpo de masa inercial m en el que las fuerzas de fricción con el aire sean despreciables y que caiga por la acción de su propio peso $\vec{W}$. El cuerpo adquiere una aceleración

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{W} = \frac{m_\mathrm{g}}{m}\vec{g}\ .$$

Para un cuerpo homogéneo ambas masas, inercial y gravitacional, son proporcionales a la cantidad de materia, por lo que la razón m_g/m pudiera depender únicamente del tipo de material.

En realidad se demuestra experimentalmente que, en ausencia de roce, *todos* los cuerpos que caen por acción de su peso lo hacen con la *misma aceleración*, independientemente del material del que estén hechos. El primero en hacer este descubrimiento fue Galileo. Lo que esto quiere decir es que en realidad la masa inercial y la masa gravitatoria son esencialmente la misma magnitud física.

Si usamos el patrón de masa inercial para definir el campo gravitacional este será igual a la aceleración con la que caen los cuerpos (aceleración de gravedad). Esta cantidad varía ligeramente de punto a punto en la superficie terrestre dependiendo de la latitud y de la distribución local de las masas. El valor promedio es aproximadamente $9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Gravitación universal

Newton conocía las leyes descubiertas por el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571–1630) sobre el movimiento de los planetas. En particular la primera (1609) que establecía que los planetas se movían en órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos, y la tercera (1618) que relacionaba el período T de revolución del planeta alrededor del Sol con el promedio r de las distancias mínima (perihelio) y máxima (afelio) entre el planeta y el Sol,

$$T^2 = Kr^3 \ .$$

La constante K es la misma para todos los planetas.

Newton estaba convencido de que las leyes de la mecánica válidas en la Tierra tenían que ser válidas también para los cuerpos celestes.

Lo primero que se observa es que el volumen del Sol es muchísimo más grande que el volumen de los planetas. Se puede suponer que también la masa del Sol sea mucho más grande que la de los planetas. Por lo tanto el centro de masas del sistema solar debe ser cercano al centro del Sol, que podemos tomar como fijo.

Si los planetas giran alrededor del Sol debe ser poque hay alguna fuerza de atracción entre el Sol y los planetas. La ecuación que determina los movimientos es la segunda ley de Newton, en donde aparece la masa del cuerpo. Como el movimiento de los planetas no depende del planeta, ni por lo tanto de su masa, como establece la tercera ley de Kepler, se deduce que la fuerza de atracción debe ser proporcional a la masa del planeta.

En esto la fuerza de atracción entre los planetas y el Sol se parece al peso de los cuerpos en la superficie de la Tierra. Newton supuso que la fuerza que hacía girar los planetas alrededor del Sol era la misma que hacía caer los cuerpos en la superficie de la Tierra y la que hacia girar la Luna alrededor de la Tierra. Más precisamente Newton postuló la ley de Gravitación Universal, un cuerpo cualquiera del universo es atraido por cualquier otro cuerpo con una fuerza proporcional a su masa. Por la ley de acción y reacción se deduce que la fuerza debe ser proporcional también a la masa del cuerpo atractor y que debe ser paralela a la recta que une los dos puntos.

Si $\vec{r}$ es el rayo vector que va del Sol a un planeta de masa m la fuerza que actúa sobre el planeta será

$$\vec{F} = -mM_S f(r)\hat{r}$$

donde M_S es la masa del Sol y $f(r)$ es una función de la distancia planeta-Sol, por ahora desconocida.

Si suponemos que la única fuerza que actúa sobre el planeta es la atracción producida por el Sol la aceleración será

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F} = -M_S f(r)\hat{r} \ .$$

Supongamos que planeta se mueva en una órbita circular, la aceleración será la aceleración centrípeta,

$$\frac{v^2}{r} = M_S f(r) \ .$$

La velocidad del planeta es la longitud de la órbita entre el período de revolución del planeta $v = 2\pi r/T$. Despejando T^2 obtenemos

$$T^2 = \frac{(2\pi r)^2}{rM_S f(r)} \ .$$

Comparando este resultado con la tercera ley de Kepler se obtiene la forma de $f(r)$.

$$f(r) = \frac{(2\pi)^2}{KM_S r^2} = \frac{G}{r^2} \ .$$

La ley de Gravitación Universal entre dos cuerpos de masas m y M será entonces

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r} \ ,$$

y la constante de la tercera ley de Kepler depende solamente de la constante G de Gravitación Universal y de la masa del Sol.

$$K = \frac{(2\pi)^2}{GM_S} \ .$$

La ley de Gravitación universal explica el movimiento de los otros cuerpos del sistema solar, satélites, cometas, asteroides etc. Por ejemplo los satélites de Júpiter, varios de los cuales fueron descubiertos por Galileo, se mueven alrededor a Júpiter cumpliendo con leyes análogas a las tres leyes de Kepler, substituyendo al Sol por Júpiter. De la razón entre las constantes de Kepler de los planetas y la de los satélites de Júpiter se puede obtener la razón entre las masas del sol y de Júpiter, $K_J/K_S = M_S/M_J \approx 1000$. Este fue uno de los primeros cálculos de *astrofísica*.

Distribución esférica de masas

El radio del Sol no es una cantidad despreciable cuando se le compara con los radios de las órbitas de los planetas. Sin embargo en las demostraciones que hizo Newton de las leyes de Kepler se usa la fórmula de atracción gravitacional entre partículas puntuales, cuando en realidad la fuerza con la que el Sol atrae a un planeta es la suma de las fuerzas con la que lo atraen las diferentes partes del Sol. Si esa fuerza neta no fuese la que se obtiene con la fórmula de las partículas puntuales las leyes de Kepler no serían válidas. Newton mismo demostró que efectivamente *la fuerza de gravitación producida por un cuerpo esférico es igual a la fuerza producida por un cuerpo puntual de la misma masa colocado en su centro*.

Esa propiedad es exclusiva de las fuerzas que decaen como r^{-2}. Su demostración se hace facilmente con las técnicas que se usan para estudiar la electrostática, por lo que la dejaremos para el curso de física III.

El peso de un cuerpo en la superficie de la Tierra será igual a la fuerza producida por un cuerpo puntual con la masa de la Tierra M_T colocada a una distancia igual al radio terrestre R

$$mg = \frac{GmM_T}{R^2} \ , \qquad g = \frac{GM_T}{R^2} \ .$$

Podemos usar esta última relación para estimar el valor de la constante de la Gravitación Universal G. La masa de la Tierra es igual a la densidad media d por el volumen $4\pi/3R^3$. El radio de la Tierra es $R = 6{,}3 \times 10^6$ m. Los materiales que forman la tierra tienen densidades entre 1 y 20 g/cm^3. Eso da un valor de G comprendido entre 2×10^{-11} y 4×10^{-10} N m^2 kg^{-2}. El valor medido es $6{,}673 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}, que corresponde a una densidad de 5,52 g/cm^3.

Experimentos de Cavendish y Eötvös

En 1798 el químico y físico inglés Henry Cavendish (1731–1810) comprobó experimentalmente la ley de gravitación de Newton y midió por primera vez la constante G. Para medir fuerzas tan pequeñas Cavendish usó un péndulo o balanza de torsión. Un par de masas m_1 y m_2 están suspendidas de un hilo H y oscilan movidas por la fuerza producida por la torcedura del hilo. Del período de la oscilación se deduce la constante elástica del hilo. Debido a la atracción gravitatoria entre las masas oscilantes m_1 y m_2 y las masas fijas M_1 y M_2 al cambiar la posición de estas últimas se produce un corrimiento de la posición de equilibrio de la oscilación, corrimiento que puede ser medido. En realidad lo que Cavendish reportó no fue la constante G sino la densidad de la Tierra, que como sabemos es equivalente. El valor encontrado por él (5,45 veces la densidad del agua) tiene un error de sólo 1,2% respecto del valor actual.

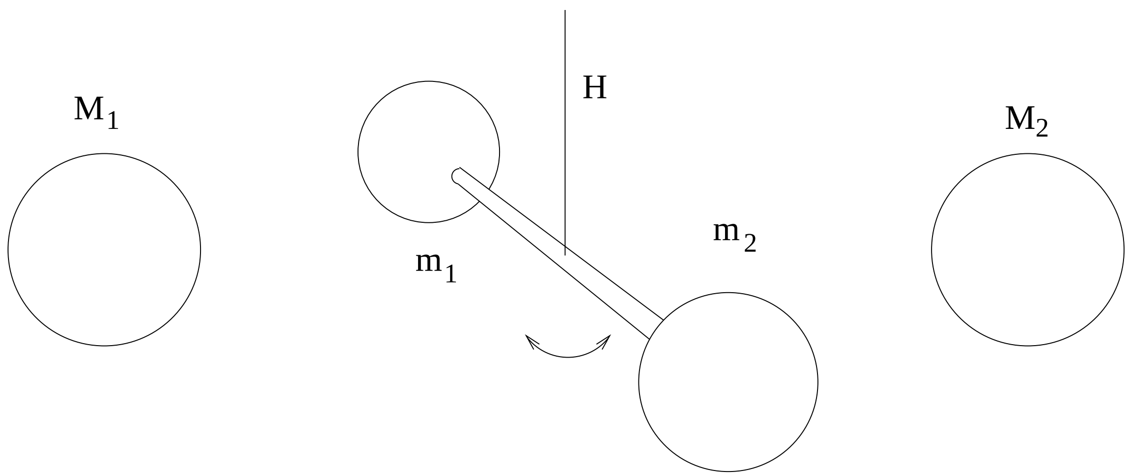

Fig. 4.5. Péndulo de torsión de Cavendish.

El péndulo de torsión fue también usado en 1885 por el físico húngaro Loránd Eötvös (1848–1919) para medir con exactitud otra importante propiedad de la gravedad: la equivalencia entre la masa gravitacional y la masa inercial.

El experimento de Eötvös está basado en que el peso de un cuerpo que se mide no es simplemente la atracción de la Tierra sino que tiene una componente de fuerza centrífuga $-m\vec{a}_C = m\omega^2\vec{r}$ dirigida en la dirección radial pependicular al eje terrestre. Esta fuerza aparente corresponde a la aceleración centrípeta que tienen los cuerpos que giran junto con la Tierra. El efecto es pequeño pero no despreciable; la aceleración de gravedad es unas 300 veces mayor que la aceleración centrípeta en el Ecuador. La componente gravitacional del peso efectivo es proporcional a la masa gravitacional mientras que la fuerza centrífuga es proporcional a la masa inercial,

$$\vec{g}_{\mathrm{ef}} = \vec{g} - \frac{m}{m_{\mathrm{g}}}\vec{a}_{\mathrm{C}} \, .$$

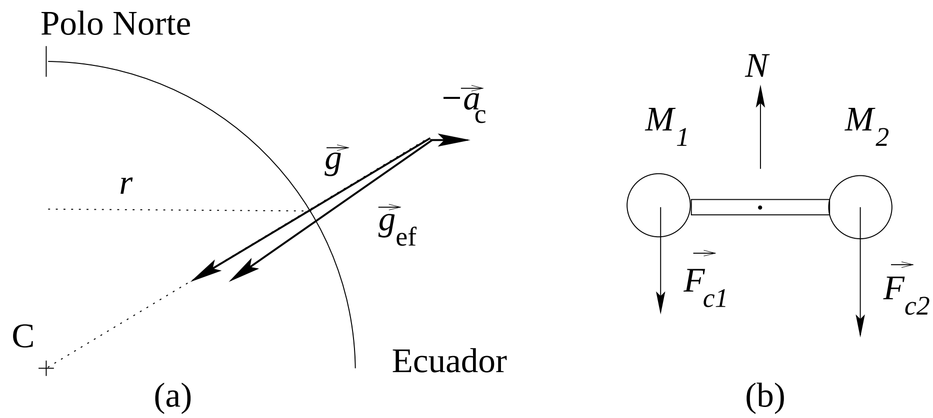

Fig. 4.6. Aceleración de gravedad efectiva.

(a) Aceleración de gravedad efectiva compuesta por la aceleración de gravedad verdadera $\vec{g}$ y la componente centrífuga $-\vec{a}_c$. (b) Vista horizontal del péndulo de torsión mostrando una eventual diferencia de fuerzas centrífugas.

La componente horizontal de la fuerza centrífuga está en la dirección Norte-Sur, por lo tanto si dos cuerpos de igual masa gravitacional se guindan de un hilo formando un péndulo de torsión y si hubiera una diferencia en las masas inerciales habría una diferencia entre las fuerzas centrífugas que produciría un corrimiento del punto de equilibrio del péndulo de torsión. Tal corrimiento dependería de la orientación del péndulo respecto al meridiano. El efecto sería nulo en la orientación Norte-Sur y máximo en la orientación Este-Oeste. Nunca ha sido detectada diferencia alguna. Según los resultados actuales ambas masas son iguales con una precisión mejor que una parte en 10^{11}. Sin embargo este resultado se limita a materia *normal* formada por electrones, protones y neutrones, compuestas estas dos últimas partículas por los quarks u y d; no sabemos que pasa con la *antimateria* ni con otras partículas elementales como los quarks s, c, b o t o los leptones pesados μ o τ.

La teoría de gravitación de Einstein, la Relatividad General, asume como verdadero el Principio de Equivalencia que implica la identidad de las masas gravitacionales e inercial.

Fuerzas de una cuerda ideal

En lo que sigue trataremos algunos tipos de fuerzas macroscópicas. Comenzaremos tratando las fuerzas en una cuerda, que es un medio muy común para aplicar fuerzas a los cuerpos. Sobre un segmento de cuerda AB actúan el peso y las fuerzas $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$ que ejercen los segmentos adyacentes. Estas dos últimas fuerzas son tangentes a la cuerda. Por la segunda ley de la mecánica

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_B \ .$$

Una cuerda ideal es inextensible y tiene masa y grosor despreciables, por lo que $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$ son opuestas $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$, independientemente del movimiento. La cuerda ideal adquiere la forma de un segmento de recta y la magnitud de la fuerza que ejerce un pedazo sobre otro, que llamamos **tensión**, es la misma a todo lo largo de la cuerda.

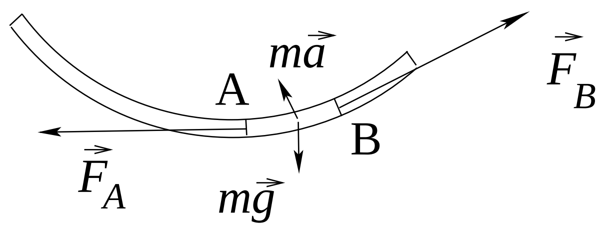

Fig. 4.7. Fuerzas de una cuerda real.

Fuerzas de contacto. Fricción seca

Otro tipo de fuerzas macroscópicas son las fuerzas entre dos superficies en contacto. Consideremos un cuerpo C en contacto con una superficie S. La fuerza $\vec{F}$ que la superficie ejerce sobre el cuerpo tiene dos componentes, una fuerza normal a la superficie $\vec{F}_N$ y una fuerza de fricción o rozamientto $\vec{F}_R$ paralela a la superficie. Por lo general la componente normal debe ser repulsiva, a menos que la superficie no tenga algún tipo de pega. La fuerza normal está determinada por la condición de que el cuerpo y la superficie sean inpenetrables, por lo que las componentes normales de las velocidades del cuerpo y la superficie deben ser iguales.

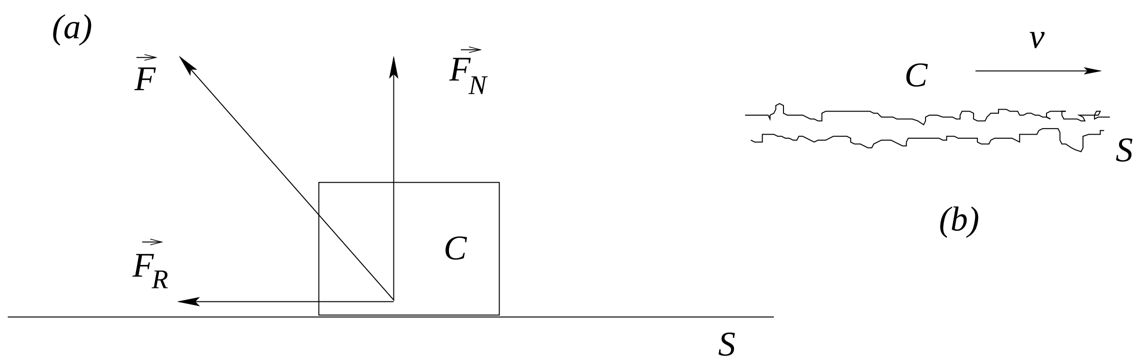

Fig. 4.8. Fuerza de contacto de una superficie sobre un cuerpo.

(a) Componentes normal y de rozamiento de la fuerza de contacto. (b) Vista microscópica de las superficies. El rozamiento es producido por el choque entre las irregularidades de una superficie con las de la otra.

La fuerza de rozamiento depende de las características de las dos superficies. Un caso típico es el de la fricción seca. En este caso hay dos tipos de rozamiento, la fricción estática, cuando no hay movimiento relativo del cuerpo con respecto a la superficie y la fricción dinámica cuando lo hay. El rozamiento estático puede tener cualquier dirección paralela a la superficie y cualquier magnitud hasta un máximo, que es proporcional a la magnitud de la fuerza normal. Para cada par de superficies hay un coeficiente de fricción estática μ_e que determina el valor del máximo roce estático

$$|\vec{F}_R| \leq \mu_e |\vec{F}_N| \ .$$

Cuando esta condición no se cumple el cuerpo necesariamente se desliza sobre la superficie.

A diferencia del rozamiento estático el dinámico esta determinado; su magnitud es proporcional a la magnitud de la fuerza normal y su dirección es antiparalela a la velocidad relativa del cuerpo respecto de la superficie,

$$\vec{F}_R = -\mu_d |\vec{F}_N| \hat{v} \ .$$

El vector $\hat{v}$ es el versor de la velocidad relativa del cuerpo C respecto de la superficie S. Típicamente el coeficiente de fricción dinámica μ_d es ligeramente menor que μ_e, de manera que se requiere de una fuerza mayor para poner en movimiento el cuerpo que para mantenerlo deslizandose. Esto es debido a que cuando el cuerpo está en reposo las irregularidades de una superficie se encajan en las de la otra.

Fricción fluida

Cuando un cuerpo se mueve dentro de un líquido o de un gas, el fluido ejerce una fuerza de fricción sobre el cuerpo. En general esta fuerza es complicada, dependiendo de la velocidad relativa del cuerpo respecto al fluido, la forma del cuerpo, sus dimensiones y la orientación respecto al movimiento relativo. Si el cuerpo es simétrico respecto a la dirección del movimiento la fricción fluida toma la forma

$$\vec{F}_F = -f(v)\hat{v}$$

donde $f(v)$ es una función de la rapidez y $\hat{v}$ es el versor de la velocidad. A baja velocidad la fricción es proporcional a la velocidad, $f(v) \approx Av$. La constante A depende de la viscosidad del fluido y de las dimensiones transversales del cuerpo. A más alta velocidad $f(v) \approx Bv^2$ y la constante B es proporcional al área transversal del cuerpo. El origen físico de la fricción fluida son las corrientes de fluido que producen las masas de fluido desplazadas por el cuerpo en movimiento y la fricción interna del fluido (viscosidad) que se manifiesta cuando diferentes capas de fluido se mueven con velocidades diferentes.

En el caso de dos superficies lubricadas el rozamiento es esencialmente fluido, proporcional a la velocidad y dependiente del espesor de la película de lubricante.

Fuerzas elásticas. Ley de Hooke

Cuando se aplican fuerzas a los sólidos, estos se deforman. Si las fuerzas son pequeñas las deformaciones son elásticas, esto es son reversibles y proporcionales a las fuerzas $\Delta l \propto F$. Esta es la ley de Hooke. Un ejemplo típico son los resortes. La magnitud de la fuerza aplicada es proporcional a la elongación o estiramiento

$$F = k\Delta l \ .$$

La constante k del resorte mide su rigidez.

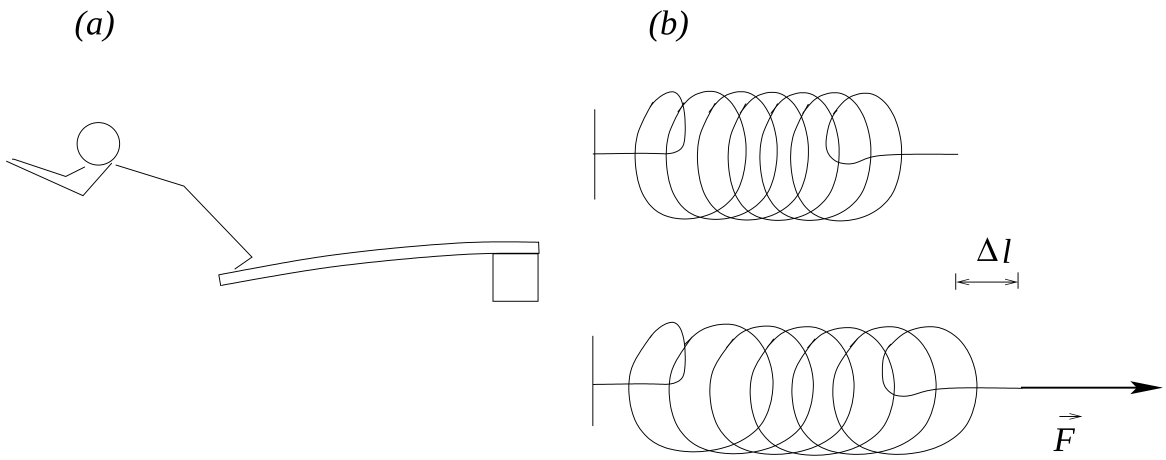

Fig. 4.9. Fuerzas elásticas.

(a) Trampolín. (b) Resorte.

Unidad 5

Trabajo y Energía

Potencia de una fuerza

Consideremos una partícula con velocidad $\vec{v}$ sobre la que actúa una fuerza F, se llama **potencia** de la fuerza al producto escalar

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv\cos\theta \ .$$

El signo de la potencia depende del ángulo θ que forman la fuerza y la velocidad; es positivo si la fuerza actúa a *favor* del movimiento (ángulo agudo) y es negativo si la fuerza actúa en *contra* (ángulo obtuso).

La unidad de potencia es el vatio (de Watt), $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J\,s^{-1}} = 1\,\mathrm{N\,m\,s^{-1}}$.

Trabajo de una fuerza

Consideremos ahora que la partícula se mueve desde el punto A en el instante t_A al punto B en el instante t_B, el trabajo hecho por la fuerza en el lapso t_A–t_B es por definición

$$W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_A}^{t_B} P\, dt \ .$$

La unidad de trabajo es el julio o Joule, $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N\,m}$. La potencia es la derivada del trabajo respecto al tiempo $P = dW/dt$.

Energía cinética

Se llama energía cinética de una partícula a 1/2 de la masa por el cuadrado de la velocidad

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 \ .$$

La energía y el trabajo tienen las mismas unidades.

Teorema del trabajo y la energía cinética

Supongamos ahora que $\vec{F}$ sea la fuerza neta que actúa sobre la partícula. Su potencia será

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = m\vec{a} \cdot \vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}m\frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{dE_K}{dt} \ .$$

Integrando entre los instantes t_A y t_B obtenemos que *el incremento de la energía cinética en ese lapso es igual al trabajo de la fuerza neta en el mismo lapso*,

$$\Delta E_K = E_K(t_B) - E_K(t_A) = W_{AB} \ .$$

El trabajo como integral de línea

El trabajo entre dos puntos A y B depende de la trayectoria y del valor de la fuerza en cada uno de sus puntos, pero no de la rapidez con la que se recorre. Consideremos una ecuación paramétrica cualquiera del camino recorrido por la partícula $\vec{x}(\lambda)$, $\lambda_A \leq \lambda \leq \lambda_B$. El movimiento está determinado por el valor del parámetro como función del tiempo, $\lambda(t)$. La velocidad será

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{x}}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt} \ .$$

Podemos entonces escribir el trabajo como

$$W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt}\, dt = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\lambda}\, d\lambda \ ,$$

donde en el último paso hicimos un cambio de variable de integración.

Lo que esto quiere decir es que la integral del trabajo es independiente de la parametrización de la trayectoria, siendo el movimiento una de esas parametrizaciones. Si llamamos $\mathcal{C}_{AB}$ al camino que recorre la partícula entre A y B podemos escribir el trabajo como una integral de camino o de línea,

$$W_{AB} = \int_{\mathcal{C}_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{x} \ .$$

La integral de línea se calcula con cualquier parametrización con la fórmula dada más arriba. También podemos definir la integral de línea directamente como un límite. Partamos la trayectoria $\mathcal{C}_{AB}$ en N trozos, separados por los puntos $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{N-1}$. Poniendo $\overrightarrow{OA} = \vec{x}_0$ y $\overrightarrow{OB} = \vec{x}_N$ podemos definir los desplazamientos

$$\Delta\vec{x}_k = \vec{x}_k - \vec{x}_{k-1} \ ,$$

y $\vec{F}_k$, el valor de la fuerza en algún punto del trozo k-esimo. La integral del trabajo será entonces

$$\int_{\mathcal{C}_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \Delta\vec{x}_k \ .$$

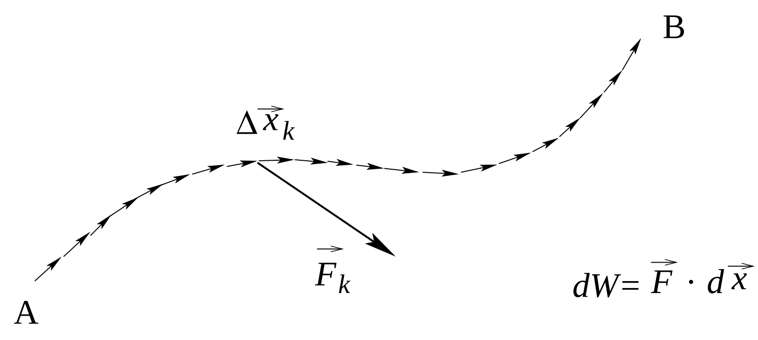

Fig. 5.1. Trabajo como integral de camino.

Fuerzas conservativas y energía potencial

Se denomina **conservativa** una fuerza $\vec{F}$ con las siguientes características

a) Debe ser un *campo* de fuerza, o sea debe depender de la posición $\vec{x}$ de la partícula, pero no debe depender, ni de la velocidad ni del tiempo.

b) La integral del trabajo entre dos puntos cualesquiera debe depender exclusivamente de los puntos inicial y final, pero no del camino para ir del uno al otro.

Esta última propiedad también se puede expresar como, *la integral del trabajo en un camino cerrado cualquiera debe ser nulo.*

$$\forall \mathcal{C} : \quad \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0 \ .$$

El pequeño círculo en el signo de integración sirve para recordar que el camino es cerrado.

Las fuerzas de fricción, que dependen de la velocidad, no son conservativas.

Para toda fuerza conservativa se puede definir un campo escalar $U(\vec{x})$ (o sea un escalar que es función del punto), que denominamos **energía potencial** de la siguiente manera:

1) Escogemos un punto arbitrario O y le asignamos a la energía potencial un valor también arbitrario en ese punto U_O,

2) El valor de U en otro punto cualquiera A se calcula con la fórmula

$$U(A) = U_O - \int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{x} \ .$$

La energía potencial está definida a menos de una constante aditiva. Esto no representa ningún problema porque lo que tiene interés físico son las diferencias de energía potencial.

Lo interesante de la energía potencial es que permite calcular el trabajo de la fuerza entre dos puntos como una diferencia de energías potenciales, más precisamente, *el trabajo de una fuerza conservativa entre los puntos A y B es igual a la disminución de la energía potencial correspondiente.*

$$W_{AB} = U(A) - U(B) = -\Delta U \ .$$

Conservación de la energía

Consideremos una partícula que se mueve entre los puntos A y B bajo la acción de una fuerza neta conservativa. El incremento de la energía cinética es igual al trabajo y este a su vez es igual a la disminución de energía potencial

$$\Delta E_K = W_{AB} = -\Delta U \ .$$

Podemos definir la **energía mecánica total** como la suma de la energía cinética más la potencial,

$$E = E_K + U = \frac{1}{2} m v_A^2 + U(A) \ .$$

El valor de la energía mecánica total se conserva durante el movimiento, $\Delta E = 0$.

Consideraciones sobre la conservación de la energía

Hay un tipo de fuerzas que no son conservativas en sentido estricto, porque dependen de la velocidad, pero que no impiden la conservación de la energía. Nos referimos a fuerzas que son perpendiculares a la velocidad y que por tanto tienen trabajo cero. En esta categoría están las fuerzas magnéticas sobre una carga y la fuerza normal que ejerce una superficie reposo sobre un cuerpo vinculado a moverse sobre ella. En cambio la otra componente de las fuerzas de contacto, la fricción, siempre produce un trabajo negativo y por eso se califica como **disipativa**.

Por lo que conocemos hasta hoy las fuerzas fundamentales, a saber, electromagnetismo, gravedad, fuerza nuclear débil y nuclear fuerte, son conservativas. Siendo esto así la energía *siempre* se conserva. La razón por la que algunas fuerzas macroscópicas aparecen como no-conservativas es porque lo que consideramos como energía de un cuerpo macroscópico es solamente parte de su verdadera energía, que es la suma de las energías cinéticas y potenciales de todos sus componentes microscópicos. Un cuerpo macroscópico tendrá, además de su energía mecánica macroscópica, una **energía interna**. Por ejemplo el trabajo del rozamiento de un cuerpo sobre una superficie se convierte en energía interna del cuerpo y de la superficie.

Energía potencial de una fuerza constante. Peso

Una fuerza constante siempre es conservativa. El trabajo entre dos puntos A y B es

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{x} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{x} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} \ ,$$

y la energía potencial es

$$U(B) = U_O - \vec{F} \cdot \overrightarrow{OB} \ .$$

El peso de un cuerpo puntual en la superficie terrestre es un caso particular. Si escogemos el eje z como vertical hacia arriba, el peso es $-mg\hat{k}$ y la energía potencial gravitatoria en un punto B es

$$U(B) = U_O + mgz_B \ .$$

Para un cuerpo extendido de masa total M, formado por partículas de masa m_k y posición $\vec{x}_k$ el peso total es $M\vec{g}$ y la energía potencial gravitatoria total es

$$U = \sum_k m_k g z_k + \text{const.} = Mgz_G + \text{const.} \ , \qquad z_G = \frac{1}{M} \sum_k m_k z_k \ ,$$

donde z_G es la altura del centro de masas del cuerpo.

Fuerza correspondiente a una energía potencial. Gradiente

El conocimiento de la energía potencial $U(x, y, z)$ permite determinar el campo de fuerza correspondiente $\vec{F}(x, y, z)$. De la definición se deduce la siguiente relación entre el incremento diferencial de la energía potencial dU y el desplazamiento diferencial $d\vec{x}$.

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{x} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) \; .$$

Para cada energía potencial hay una familia de superficies determinadas por las ecuaciones implícitas del tipo

$$U(x, y, z) = \text{const.}$$

Son las superficies **equipotenciales**. Por ejemplo en el caso del peso las superficies equipotenciales son los planos horizontales. Un desplazamiento $d\vec{x}$ sobre una superficie equipotencial implica $dU = 0$. Por lo tanto la fuerza $\vec{F}$ debe ser *perpendicular* a las superficies equipotenciales. La fuerza tiene el sentido en el que la energía potencial disminuye. Si tomamos un desplazamiento dl perpendicular a la superficie equipotencial la magnitud de la fuerza es

$$F = \left| \frac{dU}{dl} \right| \; .$$

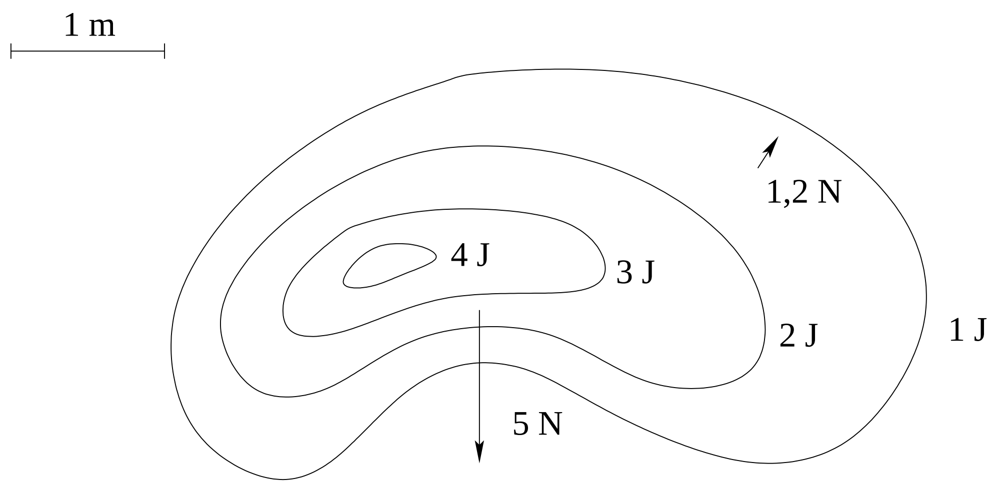

Fig. 5.2. Energía potencial en 2D.

Ejemplo de energía potencial $U(x, y)$ en dos dimensiones. Se muestran algunas curvas equipotenciales y la fuerza en dos puntos.

Se puede determinar la componente F_x de la fuerza tomando un desplazamiento en la dirección x, $d\vec{x} = dx\hat{\imath}$,

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \; .$$

En matemática, en un caso como este en el que hay varias variables con respecto a las cuales podríamos derivar, se usa el símbolo ∂ en vez de la d en el símbolo de derivada para recordarnos precisamente eso. Se habla de derivada parcial. Tenemos entonces

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \; , \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \; , \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \; .$$

También se define gradiente de la función escalar $U(x, y, z)$ al *vector* cuyas componentes son las derivadas parciales. Se usa una $\varDelta$ invertida ∇ para indicar el gradiente. El símbolo se llama *nabla*.

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$$

y

$$\vec{F} = -\nabla U \ .$$

Condición necesaria para que una fuerza sea conservativa

En una dimensión, o sea en una partícula que esté vinculada a moverse en determinada trayectoria, toda fuerza que dependa de la coordenada curvilínea s es conservativa. Esto porque hay una sola manera de ir de un punto a otro. Si F_s es la componente tangencial de la fuerza tenemos

$$F_s = -\frac{dU}{ds} \ .$$

En dos y tres dimensiones esto no es cierto porque hay infinitos caminos posibles para moverse entre dos puntos. La comprobación de si un campo de fuerza es conservativo o no, usando la definición, puede ser bastante engorrosa. Afortunadamente hay una condición local que la fuerza debe cumplir para ser conservativa. La condición es consecuencia del hecho de que el orden de las derivadas parciales respecto a dos variables diferentes se puede invertir,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

análogamente

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \ , \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \ .$$

Energía potencial de la fuerza de un resorte

Consideremos un cuerpo conectado a un extremo de un resorte cuyo otro extremo está fijo a una pared como vemos en la figura 5.3. El cuerpo se puede mover a lo largo de una línea cuya coordenada es x. La posición x_0 corresponde al punto de equilibrio del resorte. Cuando $x \geq x_0$ el resorte está estirado y cuando $x \leq x_0$ comprimido. Por la ley de Hooke la componente x de la fuerza que hace el resorte sobre el cuerpo es

$$F_x = -k(x - x_0) \ .$$

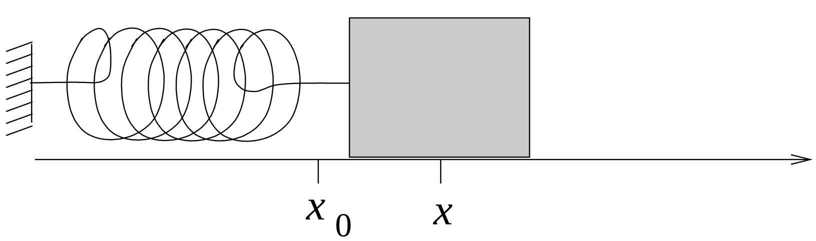

Fig. 5.3. Resorte.

Como el problema es de una dimensión la fuerza es conservativa y podemos encontrar la energía potencial integrando

$$U(x) = U(x_0) - \int_{x_0}^{x} F_x \, dx = U(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \ .$$

Siempre podemos escoger la constante $U(x_0)$ como cero.

Energía potencial de una fuerza central

Un tipo de fuerza que siempre es conservativo son las fuerzas **centrales**. Para este tipo de fuerza existe un punto C, el centro de la fuerza, respecto al cual la fuerza es radial. La magnitud de la fuerza debe ser una función de la distancia entre la posición de la partícula P y el centro C. En otras palabras, poniendo $\vec{r} = \overrightarrow{CP}$, la fuerza debe tener la forma

$$\vec{F} = f(r)\hat{r}\ .$$

La razón por la que la fuerza es conservativa es que

$$dr = |d\vec{x}| \cos\theta = \hat{r} \cdot d\vec{x}$$

como se puede ver en la figura 5.4, luego

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{x} = -f(r)\, dr$$

de donde

$$U(r) = -\int f(r)\, dr + \text{const.}$$

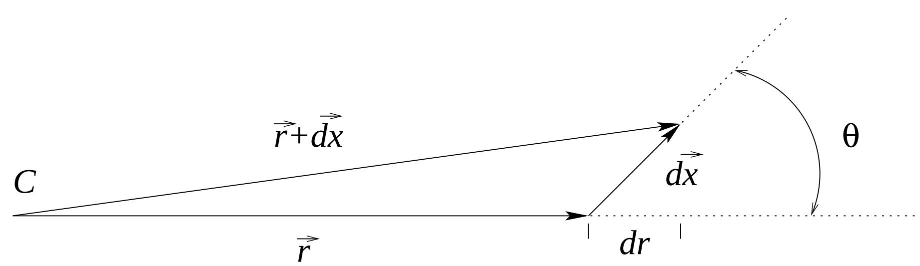

Fig. 5.4. Componente radial del desplazamiento diferencial.

Las superficies equipotenciales de una fuerza central son esferas centradas en el centro de la fuerza C.

Energía potencial de la gravedad

Como caso particular de fuerza central podemos estudiar la fuerza de gravedad que ejerce un cuerpo de masa M, supuesto fijo en el origen, sobre otro de masa m y cuya posición es $\vec{r}$. La fuerza es

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

y la energía potencial

$$U(r) = -\int f(r)\,dr = GMm\int r^{-2}\,dr = -\frac{GMm}{r} + \text{const.}$$

En este caso la constante es el valor de la energía potencial cuando la separación entre los cuerpos es infinita. Podemos escoger el valor cero para la constante. Para fijar las ideas pongamos que el cuerpo fijo sea la Tierra y el móvil un satélite artificial que se mueve bajo la acción de la sola gravedad terrestre. La energía mecánica total será

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}\ .$$

Si la energía es positiva $E > 0$ el cuerpo puede alejarse indefinidamente y aún conservar una energía cinética. En este caso la órbita es abierta. En cambio si $E < 0$ el cuerpo no puede alejarse más allá de una cierta distancia r_{max} en la que la energía cinética se anula

$$r_{\text{max}} = \frac{GMm}{-E}\ .$$

La órbita es acotada y el satélite se mantiene rotando alrededor de la Tierra o bien cae en ella.

Podemos calcular la mínima velocidad que hay que impartirle al satélite en la superficie terrestre para que pueda alejarse indefinidamente. Tal velocidad se llama velocidad de escape v_e y se determina imponiendo que la energía sea cero para una distancia igual al radio de la Tierra R

$$0 = \frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GMm}{R}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} \approx 11\,170\,\text{m/s}\ .$$

Estudio de gráficos $U(x)$ contra x

La ecuación de la conservación de la energía contiene mucha información sobre el movimiento de los cuerpos. En una dimensión lo determina. Por eso es mucho lo que se puede obtener del análisis cualitativo de las gráficas de la energía potencial.

Consideremos por ejemplo el gráfico de la figura 5.5. Los puntos críticos de la gráfica son los puntos donde la fuerza es cero $F_x = -dU/dx$. Si la partícula se encuentra en esos puntos con velocidad cero se mantiene permanentemente en ellos. Por eso se llaman puntos de **equilibrio**. Los mínimos relativos como A y C son puntos de equilibrio **estable**. Una pequeña desviación del punto de equilibrio produce fuerzas que tienden a mantener la partícula cerca del mismo. En cambio si el punto es un máximo relativo como el punto B el equilibrio es **inestable**. Una pequeña desviación produce fuerzas que tienden a alejar la partícula del punto de equilibrio. También hay puntos como D que están rodeados de puntos donde la fuerza es cero. Una pequeña desviación no produce fuerzas. Estos puntos se llaman de equilibrio **indiferente**.

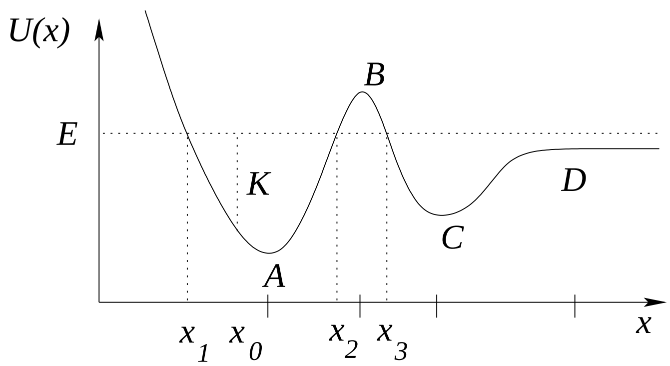

Fig. 5.5. Gráfico de $U(x)$.

La energía mecánica $E = K + U$ se mantiene constante, por lo que en el gráfico aparece como una linea horizontal. En un punto cualquiera como x_0 la energía cinética K está representada por la distancia entre $U(x)$ y la línea $E =$ const. La energía cinética no puede ser negativa $K = E - U(x) \geq 0$. Esta condición determina las zonas en las que puede moverse la partícula. Estas zonas están limitadas por los **puntos de retorno** en los que la velocidad se anula y que se determinan con la condición $E = U(x)$. En el ejemplo la partícula puede moverse en dos intervalos $x_1 \leq x \leq x_2$ y $x_3 \leq x$. En el primer intervalo el movimiento es oscilatorio. Si partimos de x_1 la partícula se mueve acelerándose hacia A punto en el que la rapidez es máxima. De allí en adelante el movimiento es retardado hasta llegar al punto de retorno x_2. A continuación se recorre el camino inverso. El otro intervalo corresponde a una órbita abierta. La partícula se acerca desde el infinito a velocidad constante, luego al acercarse a C se acelera y después de C se retarda hasta llegar a x_3 para después recorrer el camino inverso alejándose indefinidamente.

Integración de la ecuación de la energía en una dimensión

Consideremos una partícula vinculada a moverse sobre determinada trayectoria. Sea s la coordenada curvilínea sobre la trayectoria, $v = ds/dt$ la velocidad, $a = dv/dt$ la aceleración tangencial y f la componente tangencial de la fuerza neta. En general la fuerza es una función del tiempo t, la posición s y la velocidad v. La componente tangencial de la segunda ley de Newton es la ecuación que determina el movimiento $s(t)$,

$$ma = f(t, s, v) \ .$$

Este es un caso de **ecuación diferencial** donde la incógnita es una función $s(t)$ y en la que aparecen derivadas de la incógnita. El orden de la ecuación es el máximo orden de las derivadas de la incógnita que aparece. La ecuación es de segundo orden, porque aparece la aceleración. No hay una fórmula general para resolver ecuaciones diferenciales, pero hay casos particulares que se pueden resolver. Uno de esos casos es cuando la fuerza es función exclusivamente del tiempo, $f(t)$. Este caso se resuelve simplemente integrando una vez la ecuación para obtener la velocidad $v(t)$ y una segunda vez para obtener la ley horaria $s(t)$. Otro caso que se resuelve es cuando la fuerza es función exclusivamente de la posición $f(s)$. En este caso la fuerza es conservativa y tiene como energía potencial a

$$U(s) = -\int f(s')\, ds' \ .$$

Se conserva la energía

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(s) = E \ .$$

Esta relación también es una ecuación diferencial, pero es de primer orden y se puede resolver por el método de separación de variables. Si en el instante $t = 0$ la posición es s_0 y la velocidad v_0 la energía total será $E = 1/2mv_0^2 + U(s_0)$. Se puede despejar la velocidad en función de la posición

$$v = \frac{ds}{dt} = \mathrm{sign}(v_0)\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - U(s)\big)} \ .$$

Esta fórmula es válida mientras no se llegue a un punto de retorno. El método de separación de variables consiste en reescribir la ecuación poniendo todas las apariciones de una variable (s) de un lado de la ecuación y las de la otra (t) del otro lado,

$$\mathrm{sign}(v_0)\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{ds}{\sqrt{E - U(s)}} = dt \ .$$

Podemos ahora integrar de un lado respecto a s y del otro respecto a t,

$$\mathrm{sign}(v_0)\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{s_0}^{s}\frac{ds'}{\sqrt{E - U(s')}} = t \ .$$

De esta manera se obtuvo el tiempo t como función de la posición s, $t = \phi(s)$. Para obtener la ley horaria hay que conseguir la función inversa $s(t) = \phi^{-1}(t)$.

Choques

En esta sección estudiaremos los choques entre dos partículas una de masa m_1 y otra de masa m_2. Supondremos que no hay fuerzas externas a las partículas, pero los resultados serán una buena aproximación si el choque es muy rápido, de manera que impulso de las fuerzas externas sea despreciable. Si las cantidades de movimiento antes del choque son $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ y después $\vec{p}_1'$ y $\vec{p}_2'$ por la conservación de la cantidad de movimiento tenemos

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \; .$$

Para las consideraciones energéticas es más conveniente usar el sistema de referencia del centro de masas, en el cual la cantidad de movimiento total es nula,

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0 \; .$$

En el sistema de referencia del CM en todo momento las magnitudes de las cantidades de movimiento de ambas partículas son iguales, $p_1 = p_2$ y $p_1' = p_2'$.

La energía cinética de una partícula de ímpetu $\vec{p}$ es $E = p^2/(2m)$, por lo que la energía total del sistema antes del choque será

$$E = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

y después del choque

$$E' = \frac{(p_1')^2}{2m_1} + \frac{(p_2')^2}{2m_2} = \frac{(p_1')^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \; .$$

Usualmente si tenemos dos cuerpos macroscópicos que chocan, por ejemplo imaginemos dos pelotas, se producen deformaciones y fuerzas elásticas asociadas a ellas. Durante el choque parte de la energía cinética se convierte en energía potencial elástica que luego se reconvierte en energía cinética.

En un choque **perfectamente elástico** las energías antes y después del choque son iguales $E' = E$ y por lo tanto $p_1 = p_1'$.

En general hay fuerzas de fricción o también deformaciones irreversibles que hacen que la reconversión de la energía elástica en cinética no sea completa. El choque será sólo parcialmente elástico $E' = \eta E$, donde $0 \leq \eta \leq 1$.

En un choque **totalmente inelástico** la energía final, en el sistema de referencia del centro de masas, es cero, $E' = 0$ y también las cantidades de movimiento $p_1' = p_2' = 0$.

En algunos casos uno de los cuerpos puede tener antes del choque algún tipo de energía elástica acumulada, por ejemplo un resorte comprimido, energía potencial que se libera durante la colisión, con el resultado de que la energía cinética final sea mayor que la inicial ,$\eta > 1$.

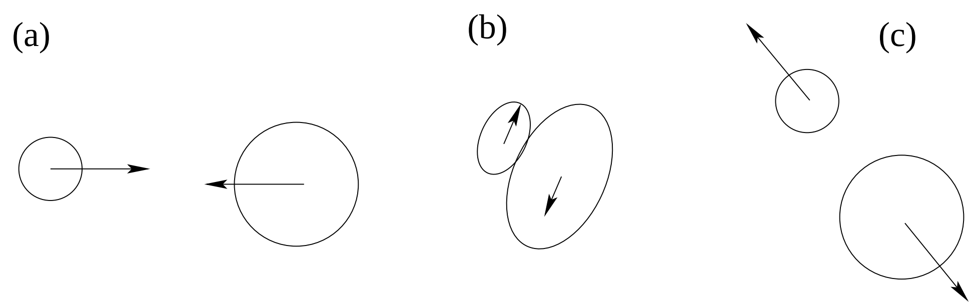

Fig. 5.6. Dos cuerpos en colisión elástica.

(a) Antes del choque, (b) durante el choque, (c) después del choque.

Unidad 6

Oscilaciones

Oscilador armónico

Los movimientos de tipo oscilatorio son muy comunes en la naturaleza. Por ejemplo, como vimos al final de la unidad 5, es oscilatorio el movimiento en una dimensión para energías cercanas a un mínimo relativo de la energía potencial $U(x)$. Tenemos oscilaciones, en columpios, edificios, moléculas, circuitos eléctricos y cualquier otra cantidad de sistemas. Por lo común cuando la amplitud de las oscilaciones es pequeña casi todas las oscilaciones son sinusoidales. Decimos que un oscilador es **armónico** cuando sus oscilaciones son sinusoidales. Otra razón para estudiar los osciladores armónicos es que son un buen ejemplo de sistema con una ecuación de movimientos no trivial, pero que sin embargo podemos resolver sin mucha dificultad.

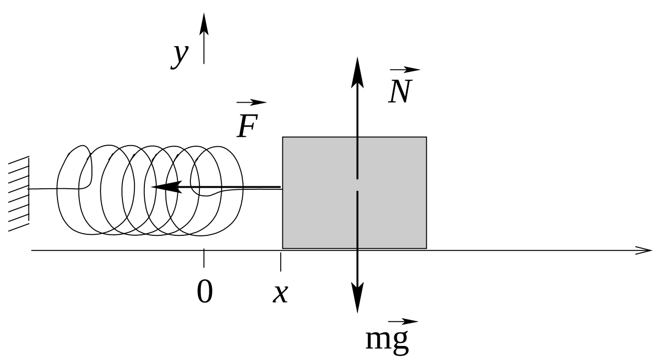

Fig. 6.1. Ejemplo de oscilador armónico.

Como ejemplo de oscilador consideraremos un cuerpo de masa m, colocado sobre una superficie horizontal sin fricción y sujeto a un resorte que por el otro extremo está fijo y que tiene una constante elástica k. El cuerpo se mueve a lo largo del eje x que es horizontal. La posición de equilibrio del resorte coincide con el origen de coordenadas.

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son su peso $m\vec{g}$, la reacción normal de la superficie $\vec{N}$ y la fuerza del resorte $\vec{F} = -kx\hat{\imath}$. Como el cuerpo está vinculado a moverse horizontalmente el peso y la fuerza normal se anulan mutuamente. La fuerza neta es la sola fuerza del resorte. Por lo tanto la componente x de la segunda ley nos da la siguiente ecuación de movimiento

$$ma_x = -kx$$

equivalente a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \ .$$

Este es un ejemplo de ecuación diferencial que no se puede resolver como en el caso de una fuerza dependiente del tiempo. Si integráramos la ecuación respecto al tiempo, del lado izquierdo de la ecuación obtendríamos la velocidad, pero del lado derecho aparecería una integral de $x(t)$ que no sabemos lo que es. La ecuación pasaría de ser diferencial a ser una ecuación integral.

Sin embargo la ecuación diferencial del oscilador armónico resuelve fácilmente, ya que es una *ecuación lineal de coeficientes constantes.* Es lineal porque la incógnita aparece en todos los términos en primer grado. Por eso tiene la siguiente propiedad: si $f(t)$ y $g(t)$ son soluciones también lo es cualquier combinación lineal $af(t)+bg(t)$. Una ecuación de segundo orden, o sea en la que aparece una derivada segunda, tiene dos constantes de integración, que en el caso de la segunda ley se pueden relacionar con la posición y velocidad iniciales $x(0)$ y $v(0)$. Si conociéramos dos soluciones independientes, la solución general sería la combinación lineal y las constantes de integración serían a y b.

En las ecuaciones lineales de coeficientes constantes la derivada de más alto orden aparece como combinación lineal de las derivadas de menor orden. ¿Qué funciones conocemos que sean sus propias derivadas?. Ante todo e^x, pero también $\cos x$ y $\sin x$, que son las opuestas de sus propias derivadas segundas. La receta es: pruebe soluciones del tipo $\exp(\alpha t)$, $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$, $\exp(\alpha t)\cos(\omega t)$ o $\exp(\alpha t)\sin(\omega t)$. Introduzca la función de prueba en la ecuación y determine los parámetros para que se satisfaga la ecuación. Siendo $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ basta probar las funciones con el seno. La solución con el coseno será automáticamente satisfecha con los mismos parámetros.

Apliquemos la receta a nuestro caso. La derivada segunda es igual a una constante negativa por la función. Lo que debemos probar es $x = \sin(\omega t)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\omega\cos(\omega t) = -\omega^2\sin(\omega t) \ .$$

Para que la ecuación se satisfaga basta poner

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \ .$$

El período de la oscilación es $T = 2\pi/\omega$.

La solución general es de la forma

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \ .$$

Las constantes A y B se obtienen de las condiciones iniciales $x_0 = x(0)$ y $v_0 = v(0)$.

$$x_0 = x(0) = A\cos(0) + B\sin(0) = A$$

y

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

de donde

$$v_0 = v(0) = B\omega$$

la solución es entonces

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + v_0\omega^{-1}\sin(\omega t) \ .$$

La solución encontrada es cómoda por su relación con las condiciones iniciales, pero no con respecto a la descripción del movimiento. Como la combinación lineal de dos sinusoides es también un sinusoide la solución también se puede escribir como

$$x(t) = C\sin(\omega t + \varphi) = C\cos(\varphi)\sin(\omega t) + C\sin(\varphi)\cos(\omega t)$$

y por lo tanto

$$A = C\sin(\varphi) \qquad \text{y} \qquad B = C\cos(\varphi)\ .$$

La constante C es la amplitud de la oscilación y φ es el desfase. Las relaciones se pueden invertir

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \text{y} \qquad \tan(\varphi) = \frac{A}{B}\ .$$

La velocidad del oscilador resulta

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = C\omega\cos(\omega t + \varphi)\ .$$

La velocidad oscila con un desfase de 90º y una amplitud $v_m = C\omega$.

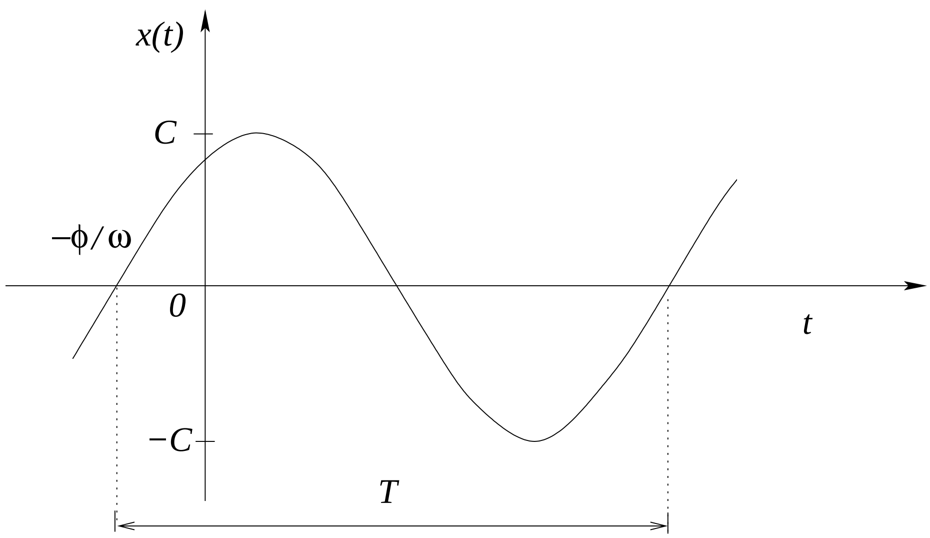

Fig. 6.2. Ley horaria armónica .

Energía del oscilador armónico

Calcularemos ahora al energía del oscilador y verificaremos que se conserva.

La energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 C^2\cos^2(\omega t + \varphi) == \frac{1}{2}kC^2\cos^2(\omega t + \varphi)\ ,$$

la energía potencial

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kC^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

y la energía mecánica total

$$E = K + U = \frac{1}{2}kC^2\big(\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)\big) = \frac{1}{2}kC^2 = \frac{1}{2}mv_m^2\ .$$

Solución de la ecuación usando conservación de la energía

El oscilador armónico es un buen ejemplo para resolver la ecuación del movimiento usando la conservación de la energía. Para simplificar pongamos que la posición inicial el el punto de equilibrio, $x = 0$. La energía será $E = 1/2mv_0^2$. El tiempo como función de la posición es

$$
\begin{aligned}
t =& \sqrt{m/2}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{E - kx^2/2}} \\
=& \sqrt{m/(2E)}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - kx^2/(2E)}} \\
=& \sqrt{m/(2E)}\sqrt{2E/k}\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \\
=& \sqrt{m/k}\sin^{-1}(\sqrt{k/(2E)}x)\ .
\end{aligned}
$$

Invirtiendo obtenemos

$$
x(t) = \sqrt{2E/k}\sin(\sqrt{k/m}\,t)
$$

que efectivamente corresponde a una amplitud $C = \sqrt{2E/k}$ y a una frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/m}$.

Oscilaciones pequeñas

Una partícula que se mueva en una dimensión presenta movimientos oscilatorios alrededor de los puntos de equilibrio estable. Si el mínimo relativo en x_0 es cuadrático

$$
U(x) \approx U_0 + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2
$$

las oscilaciones pequeñas son aproximadamente armónicas. La fuerza es

$$
F = -U'(x) \approx -U''(x_0)(x - x_0)
$$

que corresponde a una constante de resorte equivalente $k = U''(x_0)$. La frecuencia angular resulta $\omega = \sqrt{U''(x_0)/m}$.

Péndulo simple

Un sistema que presenta oscilaciones pequeñas armónicas es el péndulo simple. Una partícula de masa m está guindada de un punto C por medio de una cuerda ideal de longitud l. Consideraremos movimientos en los que la partícula se mantiene en un plano vertical. El movimiento es circular con radio l.

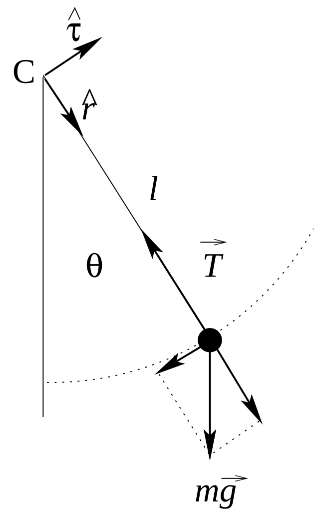

Fig. 6.3. Péndulo simple.

Las únicas fuerzas que actúan sobre la partícula son el peso $m\vec{g}$ y la tensión de la cuerda $\vec{T}$. Conviene descomponer el movimiento entre la dirección radial $\hat{r}$ y la tangencial $\hat{\tau}$. El arco s depende del ángulo θ que hace el péndulo con la vertical según la relación $s = l\theta$. Tenemos

$$\vec{g} = \cos\theta g\hat{r} - \sin\theta g\hat{\tau}$$

$$\vec{T} = -T\hat{r}$$

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\hat{\tau}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{\tau} - \frac{v^2}{l}\hat{r}\ .$$

La ecuación del movimiento

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$$

obtenemos la ecuación normal y la tangencial

$$-m\frac{v^2}{l} = -T + mg\cos\theta$$

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

La ecuación normal permite calcular la tensión de la cuerda. Como una cuerda solo puede halar la partícula, no empujarla, para ángulos mayores que $\pi/2$ en los que el coseno es negativo hay una velocidad mínima posible, por lo que la amplitud de la oscilación del ángulo no puede se mayor de $\pi/2$ porque la partícula se saldría de la trayectoria circular.

$$T = m\frac{v^2}{l} + mg\cos\theta \geq 0 \ .$$

La ecuación tangencial determina el movimiento

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g\sin(s/l) \ .$$

No es la ecuación del oscilador armónico, ni siquiera es una ecuación lineal porque la incógnita s aparece dentro de un seno. Sin embargo si los ángulos son pequeños, $|\theta| \ll 1$, el seno tiende al ángulo, $\sin\theta \approx \theta$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} \approx -\frac{g}{l}s$$

y el movimiento es aproximadamente armónico con frecuencia angular $\omega = \sqrt{g/l}$. Galileo encontró experimentalmente que el período era independiente de la amplitud y que crecía como la raíz de la longitud l. En realidad el período aumenta algo para amplitudes grandes.

Oscilador con fricción fluida

Si dejamos oscilar un péndulo por mucho tiempo, lentamente irá disminuyendo la amplitud de la oscilación debido al roce con el aire. Es un ejemplo de oscilador con fricción fluida. Consideremos el oscilador del resorte de la figura 6.1 y supongamos que haya un término de fricción proporcional a la velocidad

$$\vec{F}_{\mathrm{f}} = -\gamma\vec{v} \ .$$

La ecuación del movimiento en el eje x ahora será

$$ma_x = -kx - \gamma v_x$$

equivalente a

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \alpha\frac{dx}{dt}$$

con

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{y} \qquad \alpha = \frac{\gamma}{m} \ .$$

El parámetro ω_0 es la frecuencia angular que tendría el oscilador si no hubiese fricción. El parámetro α también tiene unidades de t^{-1} y mide la amortiguación. Hay dos casos límite, cuando $\omega_0 \gg \alpha$ domina el resorte y el movimiento es oscilatorio con una pequeña amortiguación. En el otro extremo cuando $\omega \ll \alpha$ domina la fricción y la velocidad decae exponencialmente y luego lentamente el móvil se acerca al punto de equilibrio arrastrado por el resorte. Este régimen se llama de oscilador sobreamortiguado.

Movimiento sobreamortiguado

Estudiemos primero el caso sobreamortiguado. La ecuación sigue siendo del tipo lineal con coeficientes constantes. Podemos probar en la ecuación una solución de tipo decaimiento exponencial, $x = e^{-\beta t}$,

$$\beta^2 e^{-\beta t} = -\omega_0^2 e^{-\beta t} + \alpha\beta e^{-\beta t}$$

Obtenemos la condición

$$\beta^2 - \alpha\beta + \omega_0^2 = 0$$

que es una ecuación de segundo grado en β. Resolviendo obtenemos dos soluciones

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\big(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\omega_0^2}\big) \ .$$

y

$$\beta_2 = \frac{1}{2}\big(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\omega_0^2}\big) \ .$$

Para que haya soluciones reales debe ser $2\omega_0 \leq \alpha$. Ambas soluciones son positivas

$$\frac{\omega_0^2}{\alpha} \leq \beta_2 \leq \beta_1 \leq \alpha \ .$$

La solución general es del tipo

$$x(t) = Ae^{-\beta_1 t} + Be^{-\beta_2 t}$$

donde las constantes de integración se obtienen de la posición y velocidad iniciales con:

$$x(0) = A + B \ , \qquad\qquad v(0) = -\beta_1 A - \beta_2 B \ .$$

El exponencial rápido (β_1) predomina cuando la velocidad es grande y la fuerza dominante es la fricción; la rapidez disminuye rápidamente. El exponencial lento (β_2) predomina cuando la fricción y la fuerza del resorte están más o menos equilibradas y el cuerpo se mueve hacia la posición de equilibrio.

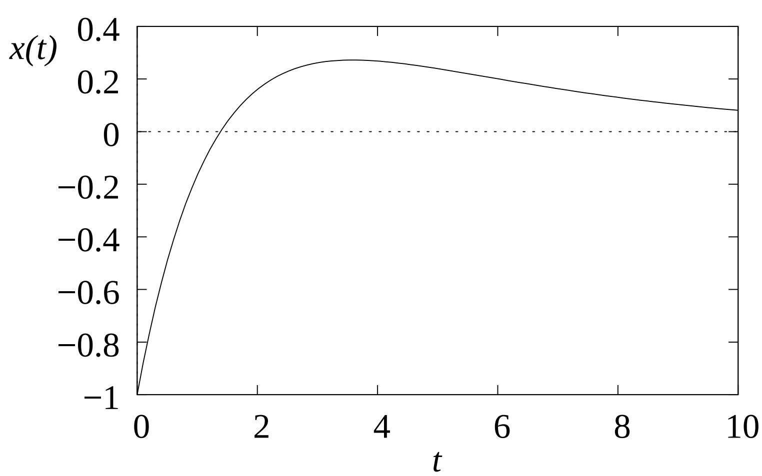

Fig. 6.4. Movimiento sobreamortiguado.

Movimiento sobreamortiguado correspondiente a $\omega_0 = \sqrt{3}\,\alpha/4$, $\beta_1 = 3\alpha/4$ y $\beta_2 = \alpha/4$. Para el gráfico se usó $\alpha = 1$, $A = -2$ y $B = 1$.

Movimiento oscilatorio amortiguado

Cuando la condición para que haya movimiento sobreamortiguado no se cumple, esto es cuando $2\omega_0 > \alpha$ el movimiento es oscilatorio amortiguado. Podemos probar una función del tipo

$$x(t) = \exp(-\beta t)\sin(\omega t) \ .$$

La velocidad y la aceleración son

$$v(t) = -\beta \exp(-\beta t)\sin(\omega t) + \omega \exp(-\beta t)\cos(\omega t)$$

$$a(t) = \beta^2 \exp(-\beta t)\sin(\omega t) - 2\beta\omega \exp(-\beta t)\cos(\omega t) - \omega^2 \exp(-\beta t)\sin(\omega t) \ .$$

Substituyendo en la ecuación,

$$\exp(-\beta t)[(\beta^2 - \omega^2)\sin(\omega t) - 2\beta\omega\cos(\omega t)] = \exp(-\beta t)[-\omega_0^2 \sin(\omega t) + \alpha\beta \sin(\omega t) - \alpha\omega\cos(\omega t)]$$

$$(\beta^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - \alpha\beta)\sin(\omega t) + (\alpha\omega - 2\beta\omega)\cos(\omega t) = 0$$

Como el coseno y el seno son independientes los factores que los multiplican deben anularse

$$\beta^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - \alpha\beta = 0$$

y

$$\alpha\omega - 2\beta\omega = 0 \ .$$

Las solución para los parámetros es

$$\beta = \alpha/2 \qquad \text{y} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2/4} \ .$$

La solución general de la ecuación es

$$x(t) = e^{-\beta t}[A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)]$$

con las condiciones iniciales

$$x(0) = B \ , \qquad \text{y} \qquad v(0) = -\beta B + \omega A \ .$$

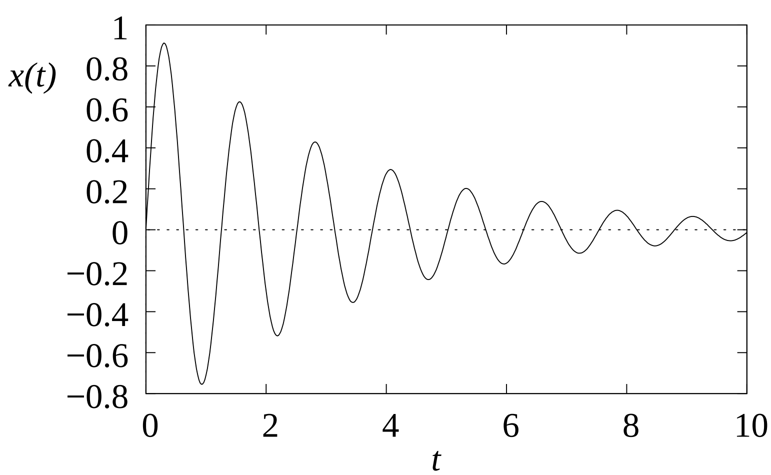

Fig. 6.5. Movimiento oscilatorio amortiguado.

Para el gráfico se usó $\beta = 0,3$, $\omega = 5$ $A = 1$ y $B = 0$.

Energía del oscilador amortiguado

La energía mecánica total del oscilador es la suma de la energía cinética más la energía elástica,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \ .$$

En el caso del oscilador con fricción la energía no se conserva sino que disminuye continuamente, como podemos comprobar calculando la derivada temporal de la energía

$$\frac{dE}{dt} = mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = (F + kx)v = -\gamma v^2 \leq 0$$

que naturalmente coincide con la potencia de la fuerza de fricción.

Índice